# ریاضی مهندسی

## (بخش اول، آنالیز فوریه و معادلات با مشتقات جزئی)

## (ترم تابستانی ۱۳۹۳ )

دکتر بیژن طائری
دانشکده‌ی علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی اصفهان

# خلاصه فصل ۱، سری فوریه مثلثاتی، سری فوریه سینوسی و کسینوسی
# جلسه‌های اول و دوم ۱۶ و ۱۷ تیرماه ۱۳۹۳

فرض کنید $pc(a,b)$ مجموعه‌ی همه‌ی توابع پیوسته‌ی قطعه‌ای حقیقی روی فاصله‌ی بسته‌ی $[a,b]$ باشد. اگر $f$ و $g$ دو تابع پیوسته‌ی قطعه‌ای روی $[a,b]$ باشند، حاصل‌ضرب داخلی $f$ و $g$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

خواص ضرب داخلی: ($\alpha$ عدد حقیقی)

$$(f,g)=(g,f) \qquad , \qquad (f,g+h)=(f,g)+(f,h) \qquad , \qquad (\alpha f,g)=\alpha(f,g).$$

نُرم تابع $f(x)$ عبارت است از

$$\|f\|=(f,f)^{۱/۲}=\left(\int_a^b [f(x)]^{۲}\,dx\right)^{۱/۲}.$$

تابع $f$ را یکه گوییم هرگاه $\|f\|=۱$. توجه کنید به ازای هر تابع $f$، اگر $\|f\|\neq ۰$، آن‌گاه $\frac{f}{\|f\|}$ تابع یکه است. توابع $f$ و $g$ را متعامد گوییم هرگاه

$$(f,g)=۰.$$

یک مجموعه از توابع پیوسته‌ی قطعه‌ای روی $[a,b]$ را متعامد گوییم، هرگاه اعضای آن دوبه‌دو بر هم عمود باشند، یعنی به ازای هر دو تابع متمایز $f$ و $g$ در این مجموعه داشته باشیم $(f,g)=۰$.

فرض کنید $V=\{\varphi_n(x)\}_{n=۱}^{\infty}$ یک مجموعه‌ی متعامد در $pc(a,b)$ باشد. سری فوریه‌ی $f(x)$ را به صورت

$$\sum_{n=۱}^{\infty} C_n\varphi_n(x)$$

تعریف می‌کنیم، که در آن

$$C_n=\frac{(f,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^{۲}}.$$

اعداد $C_n$ را ضرایب سری فوریه‌ی $f$ می‌نامیم. در حالت کلی ممکن است سری فوریه‌ی $f(x)$ همگرا نباشد، یا در صورت همگرایی به $f(x)$ همگرا نباشد. برای نشان دادن وابسته بودن این سری (و نه همگرایی) به تابع $f(x)$ می‌نویسیم

$$f\sim\sum_{n=۱}^{\infty} C_n\varphi_n, \qquad C_n=\frac{(f,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^{۲}}.$$

**مثال ۱.** *دنباله‌ی توابع*

$$\{۱,\cos nx,\sin nx\}_{n=۱}^{\infty}=\{۱,\cos x,\cos ۲x,\cos ۳x,\dots,\sin x,\sin ۲x,\sin ۳x,\dots\}$$

در $[-\pi,\pi]$ *متعامد است و* $\|\cos nx\|=\|\sin nx\|=\sqrt{\pi}$ و $\|۱\|=\sqrt{۲\pi}$.

سری فوریه تابع $f$ نسبت به مجموعه‌ی متعامد $\{1, \cos nx, \sin nx\}$ را سری فوریه‌ی مثلثاتی تابع $f$ نامیم. سری فوریه مثلثاتی $f$ عبارت است از

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

که در آن

$$a_0 = \frac{(f, 1)}{\|1\|^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \quad \text{و} \quad a_n = \frac{(f(x), \cos nx)}{\|\cos nx\|^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$
$$b_n = \frac{(f(x), \sin nx)}{\|\sin nx\|^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

**قضیه ۲.** *فرض کنید $f$ یک تابع تناوبی با دوره‌ی تناوب $2\pi$ باشد. اگر مشتقات چپ و راست $f$ در $x$ وجود داشته باشد، آن‌گاه سری فوریه‌ی مثلثاتی $f$ در $x$ به $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$ همگرا است، یعنی*

$$\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

*به ویژه اگر $f$ در $x$ پیوسته باشد، سری فوریه‌ی مثلثاتی $f$ در $x$ به $f(x)$ همگرا است، یعنی*

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

فرض کنید $V = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ یک مجموعه‌ی متعامد در $pc(a, b)$ باشد و $f = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\varphi_n$. با این فرض که انتگرال مجموع نامتناهی برابر مجموع انتگرال‌ها باشد، به دست می‌آوریم

$$(f, f) = \left(f, \sum_{n=1}^{\infty} C_n\varphi_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(f, \varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \|\varphi_n\|^2$$

و در نتیجه

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \|\varphi_n\|^2 .$$

تساوی بالا به تساوی پارسوال معروف است. از تساوی پـارسوال نتیجه می‌گیریم کـه سری $\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \|\varphi_n\|^2$ همگرا است، و از آن بلافاصله به دست می‌آید $\lim_{n\to+\infty} C_n \|\varphi_n\| = 0$ .

**قضیه ۳.** *تساوی پارسوال برای سری فوریه‌ی هر تابع پیوسته‌ی قطعه‌ای $f$ نسبت به مجموعه‌ی متعامد مثلثاتی*

$$\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$$

*در فاصله‌ی $[-\pi, \pi]$ برقرار است، یعنی*

$$\|f\|^2 = a_0^2 \|1\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 \|\cos nx\|^2 + b_n^2 \|\sin nx\|^2)$$

چون $\|1\|^2 = 2\pi$ و $\|\cos nx\|^2 = \|\sin nx\|^2 = \pi$، *داریم*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\,dx = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

از سری فوریه می‌توان جمله به جمله انتگرال و مشتق گرفت:

**قضیه ۴.** *فرض کنید $f(x)$ یک تابع پیوسته‌ی قطعه‌ای در فاصله‌ی $[-\pi,\pi]$ باشد. آن‌گاه از سری فوریه‌ی $f$، یعنی*

$$a_\circ + \sum_{n=۱}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

*چه همگرا باشد و چه همگرا نباشد می‌توان جمله به جمله انتگرال گرفت، یعنی به ازای هر $a$ و $b$ داریم*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b a_\circ\,dx + \sum_{n=۱}^{\infty}\int_a^b (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,dx.$$

*همچنین اگر توسیع تناوبی $f(x)$ تابع پیوسته و تکه‌ای هموار باشد، آن‌گاه با مشتق‌گیری جمله به جمله از سری فوریه‌ی*

$$f(x) = a_\circ + \sum_{n=۱}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

*سری فوریه‌ی $f'(x)$ به دست می‌آید، یعنی*

$$f'(x) \sim \sum_{n=۱}^{\infty}(-na_n \sin nx + nb_n \cos nx). \quad \blacksquare$$

دنباله‌ی $\{\sin nx\}_{n=۱}^{\infty}$ در $[\circ,\pi]$ متعامد است و $\|\sin nx\|^۲ = \frac{\pi}{۲}$. سری فوریه‌ی تابع پیوسته‌ی قطعه‌ای $f(x)$ در $[\circ,\pi]$ نسبت به این مجموعه را سری فوریه‌ی سینوسی $f$ می‌نامیم. بنابراین

$$f(x) \sim \sum_{n=۱}^{\infty} b_n \sin nx; \qquad b_n = \frac{(f,\sin nx)}{\|\sin nx\|^۲} = \frac{۲}{\pi}\int_\circ^\pi f(x)\sin nx\,dx.$$

همچنین دنباله‌ی $\{\cos nx\}_{n=\circ}^{\infty}$ در $[\circ,\pi]$ متعامد است و $\|۱\|^۲ = \pi$ و $\|\cos nx\|^۲ = \frac{\pi}{۲}$. سری فوریه‌ی تابع پیوسته‌ی قطعه‌ای $f(x)$ در $[\circ,\pi]$ نسبت به این مجموعه را سری فوریه‌ی کسینوسی $f$ می‌نامیم. بنابراین

$$f(x) \sim a_\circ + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \cos nx,$$

$$a_\circ = \frac{(f,۱)}{\|۱\|^۲} = \frac{۱}{\pi}\int_\circ^\pi f(x)\,dx \quad \text{و} \quad a_n = \frac{(f(x),\cos nx)}{\|\cos nx\|^۲} = \frac{۲}{\pi}\int_\circ^\pi f(x)\cos nx\,dx.$$

سری فوریه‌ی سینوسی و همچنین سری فوریه‌ی کسینوسی $f$ در $x$ به $\frac{۱}{۲}[f(x^+) + f(x^-)]$ همگرا است.

تساوی پارسوال $f$ نسبت به مجموعه‌ی متعامد $\{۱,\cos nx\}_{n=۱}^{\infty}$، در $(\circ,\pi)$ عبارت است از

$$\|f\|^۲ = a_\circ^۲\,\|۱\|^۲ + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n^۲\,\|\cos nx\|^۲,$$

یعنی تساوی پارسوال برای سری فوریه‌ی کسینوسی $f(x)$ به صورت زیر است

$$\frac{۲}{\pi}\int_\circ^\pi f(x)\,dx = ۲a_\circ^۲ + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n^۲.$$

همچنین عبارت $\|f\|^۲ = \sum_{n=۱}^{\infty} b_n^۲\,\|\sin nx\|^۲$، تساوی پارسوال $f$ نسبت به مجموعه‌ی متعامد $\{\sin nx\}_{n=۱}^{\infty}$، در $(\circ,\pi)$ است.

پس تساوی پارسوال برای سری فوریه‌ی سینوسی $f(x)$ عبارت است از

$$\frac{۲}{\pi}\int_\circ^\pi [f(x)]^۲\,dx = \sum_{n=۱}^{\infty} b_n^۲.$$

# چند مثال

**مثال ۵.** *نشان دهید دنباله‌ی توابع* $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty} = \{\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \ldots\}$ *در* $[-\pi, \pi]$ *متعامد است و نرم هر کدام از توابع را بیابید.*

**حل** اگر $n \neq m$، آن‌گاه با توجه به این نکته که $\sin nx \sin mx$ تابع زوج است و با استفاده از رابطه‌ی مثلثاتی $\sin nx \sin mx = \frac{1}{2}[\cos(n-m)x - \cos(n+m)x]$، داریم

$$\begin{aligned}
(\sin nx, \sin mx) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \ \sin mx \, dx \\
&= 2\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x] \, dx \\
&= \left[\frac{1}{n-m}\sin(n-m)x - \frac{1}{n+m}\sin(n+m)x\right]_{0}^{\pi} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

بنابراین دنباله‌ی داده شده متعامد است. اکنون نرم هر کدام از اعضای دنباله را می‌یابیم. چون

$$\begin{aligned}
\|\sin nx\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx \\
&= \int_{0}^{\pi} (1 - \cos 2nx) \, dx \\
&= \left[x - \frac{1}{2n}\sin 2nx\right]_{0}^{\pi} \\
&= \pi
\end{aligned}$$

خواهیم داشت $\|\sin nx\| = \sqrt{\pi}$. ■

**مثال ۶.** *نشان دهید دنباله‌ی توابع* $\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty} = \{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \ldots\}$ *در* $[-\pi, \pi]$ *متعامد است و نرم هر کدام از توابع را بیابید.*

**حل** اگر $n \neq m$، آن‌گاه با توجه به این نکته که $\cos nx \cos mx$ تابع زوج است و با استفاده از رابطه‌ی مثلثاتی $\cos nx \cos mx = \frac{1}{2}[\cos(n-m)x + \cos(n+m)x]$، داریم

$$\begin{aligned}
(\cos nx, \cos mx) &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx \\
&= 2\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} [\cos(n-m)x + \cos(n+m)x] \, dx \\
&= \left[\frac{1}{n-m}\sin(n-m)x + \frac{1}{n+m}\sin(n+m)x\right]_{0}^{\pi} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

بنابراین دنباله‌ی داده شده متعامد است. اکنون نرم هر کدام از اعضای دنباله را می‌یابیم. برای حالت $n = 0$ داریم

$$\|1\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx = 2\pi.$$

پس $\|1\| = \sqrt{2\pi}$. برای حالت $n \neq 0$ داریم

$$\begin{aligned} \|\cos nx\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx \\ &= \int_{0}^{\pi} (1 + \cos 2nx)\, dx \\ &= \left[x + \frac{1}{2n}\sin 2nx\right]_0^{\pi} \\ &= \pi. \end{aligned}$$

بنابراین $\|\cos nx\| = \sqrt{\pi}$. ■

دو مثال بالا نشان می‌دهند که دنباله‌های $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}$، علاوه بر فاصله‌ی $[-\pi, \pi]$، بر فاصله‌ی $[0, \pi]$ نیز متعامد هستند.

**مثال ۷.** *نشان دهید دنباله‌ی توابع*

$$\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty} = \{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \ldots, \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \ldots\}$$

*در $[-\pi, \pi]$ متعامد است و نرم هر کدام از توابع را بیابید.*

**حل** در مثال‌های ۵ و ۶ دیدیم به ازای هر $n \neq m$،

$$(\sin nx, \sin mx) = 0 \qquad \text{و} \qquad (\cos nx, \cos mx) = 0.$$

علاوه بر آن داریم $\|\cos nx\| = \|\sin nx\| = \sqrt{\pi}$ و $\|1\| = \sqrt{2\pi}$. پس تنها باید ثابت کنیم که $(\sin nx, \cos mx) = 0$. این مطلب نیز واضح است، زیرا $\sin nx \cos mx$ تابعی فرد است،

$$(\sin nx, \cos mx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\, dx = 0.$$

از این‌رو مجموعه‌ی داده شده متعامد است. ■

**مثال ۸.** *سری فوریه تابع*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < \pi, \end{cases} \qquad f(x + 2\pi) = f(x)$$

*را بیابید و همگرایی آن‌را مشخص کنید.*

(آ) *نشان دهید* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$.

(ب) *با استفاده از تساوی پارسوال نشان دهید* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

(پ) *مقدار سری* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *را بیابید.*

**حل** ضرایب سری فوریه‌ی $f(x)$ را می‌یابیم. $a_۰$ عبارت است از

$$a_۰ = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{\pi} dx = \frac{۱}{۲}.$$

اکنون $a_n$ و $b_n$ را محاسبه می‌کنیم

$$a_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\pi}\cos nx\,dx = \frac{\sin nx}{n\pi}\Big]_{۰}^{\pi} = ۰$$

$$b_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\pi}\sin nx\,dx = -\frac{\cos nx}{n\pi}\Big]_{۰}^{\pi} = \frac{۱-(-۱)^n}{n\pi}.$$

پس سری فوریه‌ی $f$ عبارت است از

$$f(x) \sim \frac{۱}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱-(-۱)^n}{\pi n}\sin nx.$$

چون

$$۱-(-۱)^n = \begin{cases} ۰ & n \text{ زوج} \\ ۲ & n \text{ فرد} \end{cases}$$

خواهیم داشت

$$f(x) \sim \frac{۱}{۲} + \frac{۲}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sin(۲n-۱)x}{۲n-۱}.$$

از طرف دیگر داریم

$$\frac{۱}{۲}[f(x^+)+f(x^-)] = \begin{cases} ۰ & -\pi < x < ۰ \\ \frac{۱}{۲} & x = ۰ \\ ۱ & ۰ < x < \pi. \end{cases}$$

بنابراین

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۲}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sin(۲n-۱)x}{۲n-۱} = \begin{cases} ۰ & -\pi < x < ۰ \\ \frac{۱}{۲} & x = ۰ \\ ۱ & ۰ < x < \pi. \end{cases}$$

(آ) اگر در عبارت بالا قرار دهیم $x = \frac{\pi}{۲}$، چون $\sin\frac{(۲n-۱)\pi}{۲} = (-۱)^{n+۱}$، داریم

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۲}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n+۱}}{۲n-۱} = ۱,$$

که نتیجه می‌دهد

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n+۱}}{۲n-۱} = \frac{\pi}{۴}.$$

(ب) تساوی پارسوال برای $f(x)$ را می‌یابیم. ابتدا سمت چپ تساوی پارسوال را می‌یابیم:

$$\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^۲\,dx = \frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\pi} dx = ۱$$

پس تساوی پارسوال برای $f(x)$ عبارت است از

$$۱ = ۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ + \sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{۲}{\pi(۲n-۱)}\right)^۲ \implies \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۴}{\pi^۲(۲n-۱)^۲} = \frac{۱}{۲}$$
$$\implies \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲n-۱)^۲} = \frac{\pi^۲}{۸}.$$

(پ) با جدا کردن جملات زوج و فرد در سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}$ می‌توان نوشت

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲} = \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲n-۱)^۲} + \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲n)^۲}.$$

از این‌رو با استفاده از (ب) خواهیم داشت

$$\frac{۳}{۴}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲} = \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲n-۱)^۲} = \frac{\pi^۲}{۸}.$$

در نتیجه

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲} = \frac{\pi^۲}{۶}. \quad \blacksquare$$

در مثال بعد سری‌های یافته شده در مثال بالا را با استفاده از یک تابع دیگر می‌یابیم.

**مثال ۹.** *(آ) سری فوریه تابع $f(x) = x$، $-\pi < x \leq \pi$، را بیابید.*
*(ب) مقدار سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{۲n-۱}$ را محاسبه کنید.*
*(پ) مقدار سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}$ را محاسبه کنید.*

**حل** ابتدا ضرایب سری فوریه‌ی $f(x) = x$ را می‌یابیم. با توجه به این که تابع $f(x) = x$ یک تابع فرد است داریم

$$a_۰ = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = ۰ \qquad \text{و} \qquad a_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx = ۰.$$

اکنون $b_n$ را با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx \\ &= \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi} x\sin nx\,dx \\ &= \frac{۲}{\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^۲}\right]_{۰}^{\pi} \\ &= \frac{۲}{\pi}\left(\frac{-\pi\cos n\pi}{n}\right) \\ &= \frac{۲}{\pi}\frac{-\pi(-۱)^n}{n} \\ &= \frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n}. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$b_n = \frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n}$$

و سری فوریه‌ی $f(x) = x$ عبارت است از

$$x = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n} \sin nx, \qquad -\pi < x < \pi.$$

(ب) به ویژه اگر قرار دهیم $x = \frac{\pi}{۲}$، آن‌گاه چون

$$\sin\frac{n\pi}{۲} = \begin{cases} ۰ & n = ۲k \\ (-۱)^{k+۱} & n = ۲k-۱, \quad k = ۱, ۲, \ldots \end{cases}$$

داریم

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{۲} &= \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n} \sin n\frac{\pi}{۲} \\ &= \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{۲(-۱)^{۲k-۱+۱}}{۲k-۱}(-۱)^{k+۱}. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^k}{۲k-۱} = -\frac{\pi}{۴}.$$

(پ) برای یافتن تساوی پارسوال برای $f(x) = x$ ابتدا انتگرال زیر را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^۲\, dx &= \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^۲\, dx \\ &= \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi} x^۲\, dx \\ &= \frac{۲}{\pi}\left[\frac{x^۳}{۳}\right]_۰^{\pi} \\ &= \frac{۲}{۳}\pi^۲. \end{aligned}$$

در نتیجه تساوی پارسوال برای $f(x) = x$ عبارت است از

$$\begin{aligned} \frac{۲}{۳}\pi^۲ &= \sum_{n=۱}^{\infty} \left(\frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n}\right)^۲ \\ &= \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۴}{n^۲}. \end{aligned}$$

از این‌رو نتیجه‌ای آشنا را داریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲} = \frac{\pi^۲}{۶}. \quad \blacksquare$$

**مثال ۱۰.** (آ) سری فوریه تابع $f(x)=x^{۲}$، $-\pi<x<\pi$، $f(x+۲\pi)=f(x)$، را بیابید.

(ب) مقدار سری $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n^{۲}}$ را محاسبه کنید.

(پ) مقدار سری $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^{۴}}$ را محاسبه کنید.

**حل** ابتدا ضرایب سری فوریه‌ی $f(x)=x^{۲}$ را می‌یابیم. با توجه به این که تابع $f(x)=x^{۲}$ یک تابع زوج است داریم

$$b_n=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=۰.$$

$a_۰$ عبارت است از

$$a_۰=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^{۲}\,dx=\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\pi}x^{۲}\,dx=\frac{\pi^{۲}}{۳}.$$

اکنون $a_n$ را با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^{۲}\cos nx\,dx\\
&= \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi}x^{۲}\cos nx\,dx\\
&= \frac{۲}{\pi}\left[x^{۲}\frac{\sin nx}{n}+۲x\frac{\cos nx}{n^{۲}}-۲\frac{\sin nx}{n^{۳}}\right]_{۰}^{\pi}\\
&= \frac{۲}{\pi}\left[۲\pi\frac{\cos n\pi}{n^{۲}}\right]\\
&= \frac{۴(-۱)^n}{n^{۲}}.
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$a_n=\frac{۴(-۱)^n}{n^{۲}}$$

و سری فوریه‌ی $f(x)=x^{۲}$ عبارت است از

$$x^{۲}=\frac{\pi^{۲}}{۳}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۴(-۱)^n}{n^{۲}}\cos nx,\qquad -\pi\le x\le\pi.$$

(ب) به ویژه اگر قرار دهیم $x=۰$، آن‌گاه داریم

$$۰=\frac{\pi^{۲}}{۳}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۴(-۱)^n}{n^{۲}}$$

و در نتیجه

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n^{۲}}=-\frac{\pi^{۲}}{۱۲}.$$

همچنین اگر قرار دهیم $x=\pi$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}
\pi^{۲} &= \frac{\pi^{۲}}{۳}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۴(-۱)^n}{n^{۲}}\cos n\pi\\
&= \frac{\pi^{۲}}{۳}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۴}{n^{۲}}
\end{aligned}$$

و در نتیجه

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲} = \frac{\pi^۲}{۶}$$

که با مثال قبل مطابقت دارد.

(پ) برای یافتن تساوی پارسوال برای $f(x) = x^۲$ ابتدا انتگرال زیر را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^۲\,dx &= \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^۴\,dx \\ &= \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi}x^۴\,dx \\ &= \frac{۲}{۵}\pi^۴. \end{aligned}$$

در نتیجه تساوی پارسوال برای $f(x) = x^۲$ عبارت است از

$$\begin{aligned} \frac{۲}{۵}\pi^۴ &= ۲\left(\frac{\pi^۲}{۳}\right)^۲ + \sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{۴(-۱)^n}{n^۲}\right)^۲ \\ &= \frac{۲\pi^۴}{۹} + \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱۶}{n^۴}. \end{aligned}$$

از این‌رو

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۴} = \frac{\pi^۴}{۹۰}. \quad \blacksquare$$

برای آزمودن قضیه‌ی ۴ از دو سری فوریه، مشتق و انتگرال می‌گیریم. در مثال ۱۰ دیدیم

$$x^۲ = \frac{\pi^۲}{۳} + \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۴(-۱)^n}{n^۲}\cos nx.$$

اگر از دو طرف رابطه‌ی بالا مشتق بگیریم داریم

$$\begin{aligned} ۲x &= \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۴(-۱)^n}{n^۲}(-n\sin nx) \\ &= \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۴(-۱)^{n+۱}}{n}\sin nx. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$x = \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n}\sin nx,$$

که با مثال ۹ مطابقت دارد. پس اگر تابع $f(x)$ مشتق‌پذیر باشد و از سری فوریه‌ی تابع $f(x)$ مشتق‌پذیر مشتق بگیریم سری فوریه $f'(x)$ به دست می‌آید.

همچنین می‌توان از سری فوریه‌ی یک تابع جمله به جمله انتگرال گرفت. مثلا اگر از سری فوریه $f(x) = x$، یعنی

$$t = \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n}\sin nt,$$

از $-\pi$ تا $x$ انتگرال بگیریم داریم

$$\int_{-\pi}^{x} t\,dt = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n} \int_{-\pi}^{x} \sin nt\,dt.$$

از این‌رو

$$\begin{aligned}
\left.\frac{t^۲}{۲}\right]_{-\pi}^{x} &= \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n} \left[\frac{-\cos nt}{n}\right]_{-\pi}^{x} \\
&= \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲(-۱)^{n}}{n^۲}(\cos nx - \cos(-n\pi)) \\
&= \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲(-۱)^{n}}{n^۲}\cos nx - \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲(-۱)^{n}}{n^۲}(-۱)^{n} \\
&= \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲(-۱)^{n}}{n^۲}\cos nx - ۲\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲}
\end{aligned}$$

و در نتیجه، چون $\frac{\pi^۲}{۶} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲}$، به دست می‌آوریم

$$\frac{x^۲}{۲} - \frac{\pi^۲}{۲} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲(-۱)^{n}}{n^۲}\cos nx - \frac{\pi^۲}{۳}$$

و در نتیجه

$$x^۲ = \pi^۲ - \frac{۲\pi^۲}{۳} + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۴(-۱)^{n}}{n^۲}\cos nx.$$

پس

$$x^۲ = \frac{\pi^۲}{۳} + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۴(-۱)^{n}}{n^۲}\cos nx$$

که با نتیجه مثال ۱۰ مطابقت دارد.

**مثال ۱۱.** *سری فوریه سینوسی و سری فوریه کسینوسی تابع $f(x) = x$، $۰ < x < \pi$ را بیابید و با استفاده از آن‌ها مجموع سری‌های* $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲}$، $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{(۲n-۱)^۲}$، $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{(۲n-۱)^۴}$، *و* $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۴}$ *را محاسبه کنید.*

**حل** ابتدا سری فوریه‌ی سینوسی $f(x) = x$ را می‌یابیم. داریم (مثال ۹ را ببینید)

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi} x\sin nx\,dx \\
&= \frac{۲}{\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^۲}\right]_{۰}^{\pi} \\
&= \frac{۲}{\pi}\,\frac{\pi(-۱)^{n+۱}}{n} \\
&= \frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n},
\end{aligned}$$

و در نتیجه سری فوریه‌ی سینوسی $f(x)$ عبارت است از

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx,\qquad 0<x<\pi.$$

برای یافتن تساوی پارسوال ابتدا محاسبه می‌کنیم

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x)]^2\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\,dx=\frac{2}{3}\pi^2.$$

پس تساوی پارسوال برای سری فوریه‌ی سینوسی $f(x)$ عبارت است از

$$\frac{2}{3}\pi^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\right)^2$$

و در نتیجه

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

که نتیجه‌ای آشنا است. برای یافتن سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ می‌توان به صورت زیر عمل کرد:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{8}.$$

اکنون سری فوریه‌ی کسینوسی $f(x)=x$ را می‌یابیم. ابتدا $a_0$ را محاسبه می‌کنیم

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\frac{\pi}{2}$$

و سپس $a_n$ را با استفاده از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx\\&=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}\\&=\frac{2}{\pi n^2}[\cos n\pi-1]\\&=\frac{2((-1)^n-1)}{\pi n^2}.\end{aligned}$$

در نتیجه سری فوریه‌ی کسینوسی $f(x)$ عبارت است از

$$x=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2((-1)^n-1)}{\pi n^2}\cos nx,\qquad 0<x<\pi.$$

اگر در سری فوریه کسینوسی $f(x)=x$ قرار دهیم $x=0$ خواهیم داشت

$$0=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2((-1)^n-1)}{\pi n^2}$$

که نتیجه می‌دهد

$$-\frac{\pi^2}{4}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-2}{(2k-1)^2}$$

و بنابراین نتیجه‌ی زیر، که در بالا نیز به دست آوردیم، حاصل می‌شود

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

تساوی پارسوال برای سری فوریه‌ی کسینوسی $f(x)$ عبارت است از

$$\frac{2}{3}\pi^2 \;=\; 2(\frac{\pi}{2})^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2((-1)^n-1)}{\pi n^2}\right)^2=\frac{\pi^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8(1-(-1)^n)}{\pi^2 n^4}.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}\pi^2-\frac{\pi^2}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8(1-(-1)^n)}{\pi^2 n^4} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{\pi^4}{48}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)^4}\\ &\Longrightarrow \quad \frac{\pi^4}{96}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}.\end{aligned}$$

برای یافتن سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ می‌نویسیم

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \;&=\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4}\\ &=\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}+\frac{1}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{15}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$$

و در نتیجه، چون $\frac{\pi^4}{96}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$، داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{16}{15}\frac{\pi^4}{96}=\frac{\pi^4}{90}. \quad \blacksquare$$

**مثال ۱۲.** *با انتگرال‌گیری از سری فوریه‌ی کسینوسی $f(x)=x$، $0<x<\pi$، سری فوریه‌ی سینوسی $g(x)=x^2-\pi x$ را محاسبه کنید و با استفاده از آن مجموع سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$ را بیابید.*

**حل** سری فوریه‌ی کسینوسی $f(x)=x$، که در مثال قبل به دست آمد، را می‌نویسیم

$$t=\frac{\pi}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲((-۱)^n-۱)}{\pi n^۲}\cos nt$$

و از صفر تا $x$ از آن انتگرال می‌گیریم. در این صورت خواهیم داشت

$$\int_۰^x t\,dt=\int_۰^x\frac{\pi}{۲}\,dt+\sum_{n=۱}^{\infty}\int_۰^x\frac{۲((-۱)^n-۱)}{\pi n^۲}\cos nt\,dt$$

که نتیجه می‌دهد

$$\frac{x^۲}{۲}=\frac{\pi}{۲}x+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲((-۱)^n-۱)}{\pi n^۳}\sin nx.$$

بنابراین

$$x^۲-\pi x=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۴((-۱)^n-۱)}{\pi n^۳}\sin nx.$$

از این‌رو سری فوریه‌ی سینوسی تابع $g(x)=x^۲-\pi x$، $۰<x<\pi$ را یافتیم. حال تساوی پارسوال را برای سری فوریه سینوسی $g(x)$ می‌یابیم. ابتدا محاسبه می‌کنیم

$$\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi}[g(x)]^۲\,dx=\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi}(x^۲-\pi x)^۲\,dx=\frac{\pi^۴}{۱۵}.$$

پس تساوی پارسوال برای سری فوریه‌ی سینوسی $g(x)$ عبارت است از

$$\frac{\pi^۴}{۱۵}=\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{۴((-۱)^n-۱)}{\pi n^۳}\right)^۲$$

و در نتیجه

$$\frac{\pi^۶}{۱۵\times۱۶\times۲}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱-(-۱)^n}{n^۶}$$

یعنی

$$\frac{\pi^۶}{۴۸۰}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲}{(۲n-۱)^۶}$$

و داریم

$$\frac{\pi^۶}{۹۶۰}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲n-۱)^۶}.$$

اکنون برای محاسبه‌ی مقدار سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۶}$ جملات زوج و فرد آن جدا می‌کنیم

$$\begin{aligned}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۶}&=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲n-۱)^۶}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲n)^۶}\\&=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲n-۱)^۶}+\frac{۱}{۶۴}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۶}.\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\left(۱-\frac{۱}{۶۴}\right)\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۶}=\frac{\pi^۶}{۹۶۰}$$

و داریم

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۶} = \frac{۶۴}{۶۳} \frac{\pi^۶}{۹۶۰} = \frac{\pi^۶}{۹۴۵}. \quad \blacksquare$$

**مثال ۱۳.** *سری فوریه سینوسی و سری فوریه کسینوسی تابع $f(x) = e^{۲x}$، $۰ < x < \pi$ را بیابید.*

**حل** ضرایب سری فوریه‌ی سینوسی $f(x) = e^{۲x}$ عبارتند از

$$b_n = \frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi} e^{۲x}\sin nx\, dx = \frac{۲e^{۲x}(-n\cos nx + ۲\sin nx)}{\pi(n^۲+۴)}\Big]_۰^{\pi} = \frac{۲n(e^{۲\pi}(-۱)^{n+۱}+۱)}{\pi(n^۲+۴)},$$

و داریم

$$e^{۲x} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲n(e^{۲\pi}(-۱)^{n+۱}+۱)}{\pi(n^۲+۴)} \sin nx.$$

همچنین ضرایب سری فوریه‌ی کسینوسی $f(x) = e^{۲x}$ عبارتند از

$$\begin{aligned} a_۰ &= \frac{۱}{\pi}\int_۰^{\pi} e^{۲x} = \frac{۱}{۲\pi}e^{۲x}\Big]_۰^{\pi} = \frac{e^{۲\pi}-۱}{۲\pi}; \\ a_n &= \frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi} e^{۲x}\cos nx\, dx = \frac{۲e^{۲x}(۲\cos nx + n\sin nx)}{\pi(n^۲+۴)}\Big]_۰^{\pi} = \frac{۴(e^{۲\pi}(-۱)^n - ۱)}{\pi(n^۲+۴)} \end{aligned}$$

و داریم

$$e^{۲x} = \frac{e^{۲\pi}-۱}{۲\pi} + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۴(e^{۲\pi}(-۱)^n-۱)}{\pi(n^۲+۴)}\cos nx. \quad \blacksquare$$

# خلاصه فصل ۲، انتگرال فوریه و کاربردهای آن

## جلسه سوم ۲۲ تیرماه ۱۳۹۳

فرض کنید که $f(x)$ یک تابع پیوسته‌ی قطعه‌ای روی فاصله‌ی $(-\infty, +\infty)$ باشد و $f(x)$ در $(-\infty, +\infty)$ مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد، یعنی

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$$

وجود داشته باشد. انتگرال فوریه تابع $f(x)$ عبارت است از

$$f(x) \sim \int_{0}^{+\infty} (A_\alpha \cos \alpha x + B_\alpha \sin \alpha x)\, d\alpha,$$

که در آن

$$A_\alpha = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \alpha x\, dx \quad \text{و} \quad B_\alpha = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \alpha x\, dx,$$

$A_\alpha$ و $B_\alpha$ را ضرایب انتگرال فوریه‌ی $f$ می‌نامیم. شرط مطلقاً انتگرال‌پذیری $f(x)$ برای اطمینان از وجود انتگرال‌های بالا است.

**قضیه ۱۴.** *فرض کنید تابع $f$ بر $(-\infty, +\infty)$ پیوسته‌ی قطعه‌ای و تکه‌ای هموار باشد. هم‌چنین فرض کنید $f$ بر $(-\infty, +\infty)$ مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد. در این صورت*

$$\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] = \int_{0}^{+\infty} [A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x]\, d\alpha.$$

*به ویژه اگر $f$ در $x$ پیوسته باشد، انتگرال فوریه‌ی $f$ در $x$ به $f(x)$ همگرا است، یعنی*

$$f(x) = \int_{0}^{+\infty} (A_\alpha \cos \alpha x + B_\alpha \sin \alpha x)\, d\alpha.$$

*فرض کنید که $f(x)$ یک تابع پیوسته‌ی قطعه‌ای و مطلقاً انتگرال‌پذیر روی فاصله‌ی $(0, +\infty)$ باشد. انتگرال فوریه‌ی سینوسی تابع $f(x)$ عبارت است از*

$$f(x) \sim \int_{0}^{+\infty} B_\alpha \sin \alpha x\, d\alpha,$$

*که در آن*

$$B_\alpha = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} f(x) \sin \alpha x\, dx,$$

*انتگرال فوریه‌ی کسینوسی تابع $f(x)$ عبارت است از*

$$f(x) \sim \int_{0}^{+\infty} A_\alpha \cos \alpha x\, d\alpha,$$

*که در آن*

$$A_\alpha = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} f(x) \cos \alpha x\, dx,$$

*انتگرال فوریه‌ی سینوسی و انتگرال فوریه‌ی کسینوسی تابع $f(x)$ در $x$ به $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$ همگرا است.*

# چند مثال

**مثال ۱۵.** (آ) *انتگرال فوریه تابع* $f(x)=\begin{cases} ۱ & |x|<۱ \\ ۰ & |x|\geq ۱\end{cases}$ ، *را بیابید.*

(ب) *مقدار انتگرال* $\int_۰^{+\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha$ *را محاسبه کنید.*

**حل** چون $f(x)$ یک تابع زوج است داریم

$$B_\alpha=\frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\alpha x\,dx=۰$$

و همچنین

$$A_\alpha=\frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\alpha x\,dx=\frac{۲}{\pi}\int_۰^۱\cos\alpha x\,dx=\frac{۲\sin\alpha}{\pi\alpha}.$$

از طرف دیگر چون

$$\frac{۱}{۲}[f(x^+)+f(x^-)]=\begin{cases} ۱ & |x|<۱ \\ ۰ & |x|>۱ \\ \frac{۱}{۲} & |x|=۱\end{cases}$$

انتگرال فوریه‌ی $f(x)$ و همگرایی آن عبارت است از

$$\int_۰^{+\infty}\frac{۲\sin\alpha}{\pi\alpha}\cos\alpha x\,d\alpha=\begin{cases} ۱ & |x|<۱ \\ ۰ & |x|>۱ \\ \frac{۱}{۲} & |x|=۱.\end{cases}$$

(ب) اگر در رابطه‌ی بالا $x=۰$ قرار دهیم داریم

$$\int_۰^{+\infty}\frac{۲\sin\alpha}{\pi\alpha}\,d\alpha=۱$$

که نتیجه می‌دهد

$$\int_۰^{+\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha=\frac{\pi}{۲}.\quad\blacksquare$$

**مثال ۱۶.** *با استفاده از انتگرال فوریه تابع* $f(x)=\begin{cases} ۱-x^۲ & |x|<۱ \\ ۰ & |x|\geq ۱\end{cases}$ *مقدار انتگرال زیر را محاسبه کنید.*

$$\int_۰^{+\infty}\frac{\sin\alpha-\alpha\cos\alpha}{\alpha^۳}\,d\alpha$$

**حل** چون $f(x)$ زوج است داریم

$$B_\alpha=\frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\alpha x\,dx=۰.$$

اکنون با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء $A_\alpha$ را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}A_\alpha &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f(x)\cos\alpha x\,dx\\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}(1-x^2)\cos\alpha x\,dx\\ &= \frac{2}{\pi}\left[(1-x^2)\frac{\sin\alpha x}{\alpha}-2x\frac{\cos\alpha x}{\alpha^2}+2\frac{\sin\alpha x}{\alpha^3}\right]_0^1\\ &= \frac{4(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)}{\pi\alpha^3}.\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\int_0^{+\infty}\frac{4(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)}{\pi\alpha^3}\cos\alpha x\,d\alpha=\frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)]=\begin{cases}1-x^2 & |x|<1\\ 0 & |x|\geq 1.\end{cases}$$

اکنون با فرض $x=0$ مقدار انتگرال مورد نظر به دست می‌آید

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha-\alpha\cos\alpha}{\alpha^3}\,d\alpha=\frac{\pi}{4}. \quad \blacksquare$$

**مثال ۱۷.** *انتگرال فوریه تابع* $f(x)=\begin{cases}\cos x & |x|<\pi\\ 0 & |x|\geq\pi\end{cases}$، *را بیابید.*

**حل** چون $f(x)$ تابع زوج است داریم $B_\alpha=0$. اکنون $A_\alpha$ را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}A_\alpha &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\alpha x\,dx\\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\cos\alpha x\,dx\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(1+\alpha)x+\cos(1-\alpha)x]\,dx\\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(1+\alpha)x}{1+\alpha}+\frac{\sin(1-\alpha)x}{1-\alpha}\right]_0^{\pi}\\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(1+\alpha)\pi}{1+\alpha}+\frac{\sin(1-\alpha)\pi}{1-\alpha}\right)\\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\sin\alpha\pi}{1+\alpha}+\frac{\sin\alpha\pi}{1-\alpha}\right)\\ &= \frac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi(1-\alpha^2)}.\end{aligned}$$

از این‌رو سری فوریه $f(x)$ و همگرایی آن عبارت است از

$$\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi(1-\alpha^2)}\cos\alpha x\,d\alpha=\frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)]=\begin{cases}\cos x & |x|<\pi\\ 0 & |x|>\pi\\ -\frac{1}{2} & |x|=\pi.\end{cases} \quad \blacksquare$$

**مثال ۱۸.** (آ) *انتگرال فوریه سینوسی و کسینوسی تابع* $f(x)=\begin{cases} 1 & 0<x<1 \\ 0 & 1<x<+\infty \end{cases}$ *، را بیابید.*

**حل** ابتدا انتگرال فوریه‌ی سینوسی $f(x)$ را می‌یابیم. چون

$$B_\alpha=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\alpha x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^1\sin\alpha x\,dx=\frac{2}{\pi\alpha}(1-\cos\alpha).$$

پس انتگرال فوریه‌ی سینوسی $f(x)$ و همگرایی آن عبارت است از

$$\int_0^{+\infty}\frac{2}{\pi\alpha}(1-\cos\alpha)\sin\alpha x\,d\alpha=\frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)]=\begin{cases} 1 & 0<x<1 \\ 0 & 1<x<+\infty \\ \frac{1}{2} & x=1. \end{cases}$$

اکنون انتگرال فوریه‌ی کسینوسی $f(x)$ را می‌یابیم. داریم

$$A_\alpha=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\alpha x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^1\cos\alpha x\,dx=\frac{2\sin\alpha}{\pi\alpha}.$$

بنابراین انتگرال فوریه‌ی کسینوسی $f(x)$ عبارت است از

$$\int_0^{+\infty}\frac{2\sin\alpha}{\pi\alpha}\cos\alpha x\,d\alpha=\begin{cases} 1 & 0<x<1 \\ 0 & 1<x<+\infty \\ \frac{1}{2} & x=1. \end{cases}\quad\blacksquare$$

**مثال ۱۹.** *با استفاده از انتگرال فوریه‌ی مناسب، درستی روابط زیر را ثابت کنید*

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos k\alpha+k\alpha\sin k\alpha-1}{\alpha^2}\cos\alpha x\,d\alpha=\begin{cases} \frac{\pi}{2}x & 0\le x<k \\ k\frac{\pi}{4} & x=k \\ 0 & x>k \end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin k\alpha-k\alpha\cos k\alpha}{\alpha^2}\sin\alpha x\,d\alpha=\begin{cases} \frac{\pi}{2}x & 0\le x<k \\ k\frac{\pi}{4} & x=k \\ 0 & x>k \end{cases}$$

**حل** قرار می‌دهیم $f(x)=\begin{cases} x & 0<x<k \\ 0 & x>k \end{cases}$ و انتگرال فوریه‌ی سینوسی آنرا می‌یابیم. داریم

$$\begin{aligned} B_\alpha &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(x)\sin\alpha x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^k x\sin\alpha x\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-x\cos\alpha x}{\alpha}+\frac{\sin\alpha x}{\alpha^2}\right]_0^k \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{-k\cos\alpha k}{\alpha}+\frac{\sin\alpha k}{\alpha^2}\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{\sin\alpha k-k\alpha\cos\alpha k}{\alpha^2}. \end{aligned}$$

چون $\begin{cases} x & 0 < x < k \\ 0 & x > k \\ \frac{k}{2} & x = k \end{cases} = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$ انتگرال فوریه‌ی سینوسی $f(x)$ و همگرایی آن عبارت است از

$$\int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\sin \alpha k - k\alpha \cos \alpha k}{\alpha^2} \sin \alpha x \, dx = \begin{cases} x & 0 < x < k \\ 0 & x > k \\ \frac{k}{2} & x = k. \end{cases}$$

در نتیجه

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha k - k\alpha \cos \alpha k}{\alpha^2} \sin \alpha x \, dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} x & 0 < x < k \\ 0 & x > k \\ \frac{\pi}{4} k & x = k. \end{cases}$$

اکنون انتگرال فوریه‌ی کسینوسی $f(x)$ را می‌یابیم. داریم

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(x) \cos \alpha x \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^k x \cos \alpha x \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{x \sin \alpha x}{\alpha} + \frac{\cos \alpha x}{\alpha^2} \Big]_0^k \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{k \sin \alpha k}{\alpha} + \frac{\cos \alpha k}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{k\alpha \sin \alpha k + \cos \alpha k - 1}{\alpha^2} \end{aligned}$$

بنابراین انتگرال فوریه‌ی کسینوسی $f(x)$ و همگرایی آن عبارت است از

$$\int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi} \frac{k\alpha \sin \alpha k + \cos \alpha k - 1}{\alpha^2} \cos \alpha x \, dx = \begin{cases} x & 0 < x < k \\ 0 & x > k \\ \frac{k}{2} & x = k. \end{cases}$$

در نتیجه

$$\int_0^{+\infty} \frac{k\alpha \sin \alpha k + \cos \alpha k - 1}{\alpha^2} \cos \alpha x \, dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} x & 0 < x < k \\ 0 & x > k \\ \frac{\pi}{4} k & x = k. \end{cases}$$

# خلاصه فصل ۳، مسائل اشتورم-لیوویل

## جلسه چهارم ۲۳ تیرماه ۱۳۹۳

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی دوم

$$\frac{d}{dx}\left[r(x)\frac{dy}{dx}\right] + [q(x) + \sigma p(x)]y = ۰,$$

که در آن $\sigma$ یک پارامتر است و توابع $p(x)$، $q(x)$، و $r(x)$ توابع حقیقی هستند، را یک معادله‌ی اشتورم-لیوویل گوییم. برای اطمینان از وجود جواب فرض می‌کنیم $p(x)$، $q(x)$، $r(x)$، و $r'(x)$ در فاصله‌ی $[a,b]$ پیوسته‌اند و به ازای هر $x \in [a,b]$، $r(x) \neq ۰$. هر معادله دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی دوم

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = ۰$$

را می‌توان با ضرب کردن در تابع

$$\mu(x) = \frac{۱}{P(x)} e^{\int \frac{Q(x)}{P(x)}\, dx}$$

به معادله‌ی اشتورم-لیوویل تبدیل کرد.

اگر عملگر $L$ را به صورت

$$L = \frac{d}{dx}\left[r\frac{d}{dx}\right] + qy$$

تعریف کنیم، معادله‌ی اشتورم-لیوویل را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$L\left[y\right] + \sigma p(x)y = ۰.$$

یک معادله‌ی اشتورم-لیوویل

$$L[y] + \sigma p(x)y = ۰ \qquad a < x < b$$

به همراه شرایط مرزی

$$\begin{cases} a_۱ y(a) + b_۱ y'(a) = ۰ \\ a_۲ y(b) + b_۲ y'(b) = ۰ \end{cases} \qquad (۱)$$

که در آن $a_۱$، $a_۲$، $b_۱$، $b_۲$ اعداد حقیقی ثابت هستند؛ علاوه بر آن $a_۱$، $b_۱$ و $a_۲$، $b_۲$ هر دو با هم صفر نیستند؛ را یک مسأله‌ی اشتورم-لیوویل (مسأله‌ی مقدار مرزی) منظم گوییم. شرایط مرزی (۱) را، که خطی و همگن هستند، شرایط مرزی مسأله گوییم. توجه کنید که تابع ثابت $y(x) = ۰$ هم در معادله دیفرانسیل و هم در شرایط مرزی صدق می‌کند. این جواب را جواب بدیهی گوییم. جواب‌های نابدیهی مسأله را (در صورت وجود) توابع ویژه‌ی مسأله و مقادیر $\sigma$ که به ازای آن‌ها جواب نابدیهی وجود دارد را مقادیر ویژه‌ی مسأله گوییم. چون معادله و شرایط مرزی همگن هستند، به سادگی می‌توان دید که هر ترکیب خطی از توابع ویژه‌ی متناظر مقدار ویژه‌ی $\sigma$، مجدداً تابع ویژه متناظر با $\sigma$ است. به ویژه هر ضریب یک تابع ویژه، مجدداً تابع ویژه است.

**قضیه ۲۰.** *فرض کنید توابع $p(x)$، $q(x)$، $r(x)$، و $r'(x)$ در فاصله‌ی $[a,b]$ پیوسته باشند و به ازای هر $x \in [a,b]$، $r(x) \neq ۰$. اگر $\varphi_\lambda(x)$ و $\varphi_\mu(x)$ توابع ویژه‌ی مسأله اشتورم-لیوویل*

$$\begin{cases} L[y] + \sigma p(x) y = ۰, & a < x < b \\ a_۱ y(a) + b_۱ y'(a) = ۰ \\ a_۲ y(b) + b_۲ y'(b) = ۰. \end{cases}$$

*متناظر مقادیر ویژه‌ی متمایز $\lambda$ و $\mu$ باشند، آن‌گاه $\varphi_\lambda(x)$ و $\varphi_\mu(x)$ نسبت به تابع وزن $p(x)$ متعامد هستند، یعنی*

$$\int_a^b p(x)\varphi_\lambda(x)\varphi_\mu(x)\,dx = ۰.$$

فرض کنید $\{\varphi_n(x)\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ی توابع ویژه‌ی مسأله اشتورم-لیوویل متناظر مقادیر ویژه‌ی متمایز باشد. دیدیم دنباله‌ی $\{\varphi_n(x)\}_{n=۱}^{\infty}$ نسبت به تابع وزن $p(x)$ متعامد است. از این‌رو می‌توانیم سری فوریه‌ی تابع پیوسته‌ی قطعه‌ای روی فاصله‌ی $[a,b]$ را بر حسب این مجموعه‌ی متعامد بیایم. فرض کنید $\sum_{n=۱}^{\infty} C_n \varphi_n(x)$ سری فوریه‌ی $f$ نسبت به این مجموعه‌ی متعامد باشد، که در آن $C_n = \dfrac{(f,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^۲}$، ضرایب سری فوریه هستند. می‌توان نشان داد تساوی پارسوال برقرار است، یعنی $\sum_{n=۱}^{\infty} C_n^۲ \|\varphi_n\|^۲ = \|f\|^۲$.
علاوه بر آن اگر $f$ پیوسته‌ی قطعه‌ای باشند، آن‌گاه سری فوریه‌ی $f$ در هر نقطه‌ی $x \in (a,b)$ که مشتقات چپ و راست $f$ وجود داشته باشند، به $\frac{۱}{۲}[f(x^-) + f(x^+)]$ همگرا است.

# چند مثال

معادله دیفرانسیل

$$x^۲ y'' + xy' + \sigma y = ۰\,, \quad x > ۰$$

را در نظر بگیرید. با ضرب کردن معادله در

$$\mu = \frac{۱}{x^۲} e^{\int \frac{x}{x^۲}\,dx} = \frac{۱}{x^۲} e^{\ln x} = \frac{۱}{x}.$$

خواهیم داشت

$$xy'' + y' + \frac{\sigma}{x} y = ۰.$$

از این‌رو معادله‌ی اشتورم-لیوویل متناظر عبارت است از

$$\frac{d}{dx}\left[x \frac{dy}{dx}\right] + \frac{\sigma}{x} y = ۰.$$

سه مثال مهم بعد نشان می‌دهند مجموعه‌های متعامد مثلثاتی که قبلاً دیده‌ایم، توابع ویژه‌ی مساله‌های اشتورم-لیوویل بخصوصی هستند.

**مثال ۲۱.** *مقادیر و توابع ویژه‌ی مسأله‌ی اشتورم-لیوویل زیر را بیابید.*

$$\begin{cases} y'' + \sigma y = ۰, & ۰ < x < L \\ y(۰) = ۰ \\ y(L) = ۰. \end{cases}$$

**حل** چون معادله شاخص معادله دیفرانسیل $y''+\sigma y=0$ (که با فرض $y(x)=e^{rx}$ به دست می‌آید) عبارت است از $r^2+\sigma=0$، پس $r=\pm\sqrt{-\sigma}$، و در نتیجه باید سه حالت در نظر بگیریم: $\sigma=0$، $\sigma<0$، و $\sigma>0$. حالت مختلط برای $\sigma$ را در نظر نمی‌گیریم، زیرا ثابت می‌شود که تحت یک شرط (که برای مساله‌های مورد بررسی معمولاً برقرار هستند) مقادیر ویژه‌ی مسأله‌ی اشتورم-لیوویل منظم حقیقی هستند.

حالت اول: $\sigma=0$. در این حالت داریم $r=0$. پس جواب عمومی معادله عبارت است از

$$y(x)=c_1x+c_2.$$

چون $y(0)=0$، داریم $c_2=0$، پس $y(x)=c_1x$. اکنون چون $y(L)=0$، داریم $c_1L=0$، که نتیجه می‌دهد $y(x)=0$. از این‌رو در این حالت مسأله فقط جواب بدیهی دارد. پس $\sigma=0$ مقدار ویژه نیست.

حالت دوم: $\sigma=-\lambda^2$، که در آن $\lambda=\sqrt{-\sigma}>0$. در این حالت داریم $r=\pm\lambda$. در نتیجه جواب عمومی معادله عبارت است از

$$y(x)=c_1\cosh\lambda x+c_2\sinh\lambda x.$$

چون $y(0)=0$، داریم $c_1=0$، پس $y(x)=c_2\sinh\lambda x$. اکنون چون $y(L)=0$، داریم $c_2\sinh\lambda L=0$. پس $c_2=0$ یا $\sinh\lambda L=0$، اما حالت اخیر رخ نمی‌دهد، زیرا $\sinh\lambda L\neq 0$. پس باید داشته باشیم $c_2=0$ و در نتیجه $y(x)=0$. از این‌رو در این حالت مسأله فقط جواب بدیهی دارد. پس $\sigma<0$ هم مقدار ویژه نیست.

حالت سوم: $\sigma=\lambda^2$، که در آن $\lambda=\sqrt{\sigma}>0$. در این حالت داریم $r=\pm i\lambda$. در نتیجه جواب عمومی معادله عبارت است از

$$y(x)=c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x.$$

چون $y(0)=0$، داریم $c_1=0$، پس $y(x)=c_2\sin\lambda x$. اکنون چون $y(L)=0$، داریم $c_2\sin\lambda L=0$. پس $c_2=0$ یا $\sin\lambda L=0$. اگر $\sin\lambda L=0$، آن‌گاه $\lambda L=n\pi$ عدد طبیعی است. پس اگر $\lambda=\frac{n\pi}{L}$، $n=1,2,3,\ldots$، آن‌گاه می‌توان $c_2$ را ناصفر گرفت و جواب‌های نابدیهی از مسأله را یافت. بنابراین جواب‌های متناظر $\lambda_n=\frac{n\pi}{L}$، $n=1,2,3,\ldots$، عبارتند از $c_2\sin\frac{n\pi}{L}x$. از این‌رو مقادیر و توابع ویژه‌ی مسأله عبارتند از

$$\sigma_n=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,\quad y_n(x)=\sin\frac{n\pi}{L}x.\quad\blacksquare$$

**مثال ۲۲.** *مقادیر و توابع ویژه‌ی مسأله‌ی اشتورم-لیوویل زیر را بیابید.*

$$\begin{cases} y''+\sigma y=0, & 0<x<\pi\\ y'(0)=0\\ y'(\pi)=0.\end{cases}$$

**حل** معادله شاخص معادله دیفرانسیل $y''+\sigma y=0$ عبارت است از $r^2+\sigma=0$، پس $r=\pm\sqrt{-\sigma}$، و مشابه مثال قبل سه حالت در نظر می‌گیریم: $\sigma=0$، $\sigma<0$، و $\sigma>0$.

حالت اول: $\sigma=0$. در این حالت داریم $r=0$. در نتیجه جواب عمومی معادله عبارت است از

$$y(x)=c_1x+c_2.$$

چون $y'(\circ) = \circ$، داریم $c_1 = \circ$، پس $y(x) = c_2$. اکنون چون تابع $y(x) = c_2$ در شرط $y'(\pi) = \circ$ صدق می‌کند، پس $y(x) = c_2$، برای $c_2 \neq \circ$، یک جواب نابدیهی از مسأله است. از این‌رو $\sigma_\circ = \circ$ یک مقدار ویژه و $y_\circ(x) = 1$ یک تابع ویژه متناظر آن است.

حالت دوم: $\sigma = -\lambda^2$، که در آن $\lambda = \sqrt{-\sigma} > \circ$. در این حالت داریم $r = \pm\lambda$. در نتیجه جواب عمومی معادله عبارت است از

$$y(x) = c_1 \cosh \lambda x + c_2 \sinh \lambda x.$$

چون $y'(\circ) = \circ$، داریم $c_2 = \circ$، پس $y(x) = c_1 \cosh \lambda x$. اکنون چون $y'(\pi) = \circ$، داریم $c_1 \lambda \sinh \lambda\pi = \circ$. پس $c_1 \lambda \pi = \circ$ یا $\sinh \lambda = \circ$، اما حالت اخیر رخ نمی‌دهد، زیرا $\sinh \lambda\pi \neq \circ$. پس باید داشته باشیم $c_1 = \circ$ و در نتیجه $y(x) = \circ$. از این‌رو در این حالت مسأله فقط جواب بدیهی دارد. پس $\sigma < \circ$ مقدار ویژه نیست.

حالت سوم: $\sigma = \lambda^2$، که در آن $\lambda = \sqrt{\sigma} > \circ$. در این حالت داریم $r = \pm i\lambda$. در نتیجه جواب عمومی معادله عبارت است از

$$y(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x.$$

چون $y'(\circ) = \circ$، داریم $c_2 = \circ$، پس $y(x) = c_1 \cos \lambda x$. اکنون چون $y'(\pi) = \circ$، داریم $-c_1 \lambda \sin \lambda\pi = \circ$. پس $c_1 = \circ$ یا $\sin \lambda\pi = \circ$. اگر $\sin \lambda\pi = \circ$، آن‌گاه $\lambda = n$ عدد طبیعی است. پس اگر $\lambda = n$، $n = 1, 2, 3, \ldots$، آن‌گاه می‌توان $c_1$ را ناصفر گرفت و جواب‌های نابدیهی از مسأله را یافت. بنابراین جواب‌های متناظر $\lambda_n = n$، $n = 1, 2, 3, \ldots$، عبارتند از $c_2 \cos nx$. از این‌رو مقادیر و توابع ویژه‌ی مسأله عبارتند از

$$\sigma_\circ = \circ, \quad y_\circ(x) = 1, \qquad \sigma_n = n^2, \quad y_n(x) = \cos nx. \quad \blacksquare$$

به طور کلی‌تر مثال بالا نشان می‌دهد که مقادیر و توابع ویژه‌ی مساله‌ی

$$\begin{cases} y'' + \sigma y = \circ, & \circ < x < L \\ y'(\circ) = \circ \\ y'(L) = \circ. \end{cases}$$

عبارتند از

$$\sigma_\circ = \circ, \quad y_\circ(x) = 1, \qquad \sigma_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad y_n(x) = \cos \frac{n\pi}{L} x.$$

**مثال ۲۳.** *مقادیر و توابع ویژه‌ی مسأله‌ی اشتورم-لیوویل زیر را بیابید.*

$$\begin{cases} y'' + \sigma y = \circ, & -\pi < x < \pi \\ y(-\pi) = y(\pi) \\ y'(-\pi) = y'(\pi). \end{cases}$$

**حل** معادله شاخص معادله دیفرانسیل $y'' + \sigma y = \circ$ عبارت است از $r^2 + \sigma = \circ$، پس $r = \pm\sqrt{-\sigma}$، و مشابه مثال قبل سه حالت در نظر می‌گیریم: $\sigma = \circ$، $\sigma < \circ$، و $\sigma > \circ$.

حالت اول: $\sigma = \circ$. در این حالت داریم $r = \circ$. در نتیجه جواب عمومی معادله عبارت است از

$$y(x) = c_1 x + c_2.$$

چون $y(-\pi) = y(\pi)$، داریم $-c_1\pi + c_2 = c_1\pi + c_2$، که نتیجه می‌دهد $c_1 = 0$. پس $y(x) = c_2$. اکنون چون تابع $y(x) = c_2$ در شرط $y'(-\pi) = y'(\pi)$ صدق می‌کند، پس $y(x) = c_2$، برای $c_2 \neq 0$، یک جواب نابدیهی از مسأله است. از این‌رو $\sigma_0 = 0$ یک مقدار ویژه و $y_0(x) = 1$ یک تابع ویژه متناظر آن است.

حالت دوم: $\sigma = -\lambda^2$، که در آن $\lambda = \sqrt{-\sigma} > 0$. در این حالت داریم $r = \pm\lambda$. در نتیجه جواب عمومی معادله عبارت است از

$$y(x) = c_1 \cosh \lambda x + c_2 \sinh \lambda x.$$

چون $y(-\pi) = y(\pi)$، داریم

$$c_1 \cosh \lambda(-\pi) + c_2 \sinh \lambda(-\pi) = c_1 \cosh \lambda\pi + c_2 \sinh \lambda\pi$$

و در نتیجه

$$c_1 \cosh \lambda\pi - c_2 \sinh \lambda\pi = c_1 \cosh \lambda\pi + c_2 \sinh \lambda\pi.$$

با ساده کردن رابطه‌ی اخیر به دست می‌آوریم $c_2 \sinh \lambda\pi = 0$ و چون $\sinh \lambda\pi \neq 0$ خواهیم داشت $c_2 = 0$. بنابراین $y(x) = c_1 \cosh \lambda x$. اکنون چون $y'(-\pi) = y'(\pi)$،

$$c_1 \lambda \sinh \lambda(-\pi) = c_1 \lambda \sinh \lambda\pi$$

و در نتیجه $c_1 \lambda \sinh \lambda\pi = 0$ و داریم $c_1 = 0$. در نتیجه $y(x) = 0$. از این‌رو در این حالت مسأله فقط جواب بدیهی دارد. پس $\sigma < 0$ مقدار ویژه نیست.

حالت سوم: $\sigma = \lambda^2$، که در آن $\lambda = \sqrt{\sigma} > 0$. در این حالت داریم $r = \pm i\lambda$. در نتیجه جواب عمومی معادله عبارت است از

$$y(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x.$$

چون $y(-\pi) = y(\pi)$ و $y'(-\pi) = y'(\pi)$، داریم

$$\begin{cases} c_1 \cos \lambda(-\pi) - c_2 \sin \lambda(-\pi) = c_1 \cos \lambda\pi + c_2 \sin \lambda\pi \\ \lambda c_1 \sin \lambda(-\pi) + \lambda c_2 \cos \lambda(-\pi) = -\lambda c_1 \sinh \lambda\pi + \lambda c_2 \cos \lambda\pi. \end{cases}$$

در نتیجه

$$\begin{cases} c_1 \cos \lambda\pi - c_2 \sin \lambda\pi = c_1 \cos \lambda\pi + c_2 \sin \lambda\pi \\ \lambda c_1 \sin \lambda\pi + \lambda c_2 \cos \lambda\pi = -\lambda c_1 \sinh \lambda\pi + \lambda c_2 \cos \lambda\pi. \end{cases}$$

از معادلات بالا نتیجه می‌گیریم که

$$c_1 \sin \lambda\pi = 0 \quad \text{و} \quad c_2 \sin \lambda\pi = 0.$$

برای داشتن جواب نابدیهی از معادله باید $\lambda$ برابر یکی از مقادیر

$$\lambda_n = n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

باشد. به ازای چنین $\lambda$ای مقادیر $c_1$ و $c_2$ را می‌توان ناصفر در نظر گرفت و جواب‌هاب نابدیهی از مسأله را یافت. پس در این حالت مقادیر ویژه‌ی مسأله و توابع ویژه‌ی متناظر عبارتند از

$$\sigma_n = \lambda_n^2 = n^2, \quad y_n = \cos nx, \quad \sin nx, \quad n = 1, 2, \ldots. \quad \blacksquare$$

به طور کلی‌تر مثال بالا نشان می‌دهد که مقادیر و توابع ویژه‌ی مساله‌ی

$$\begin{cases} y''+\sigma y=0, & -L<x<L \\ y(-L)=y(L) \\ y'(-L)=y'(L). \end{cases}$$

عبارتند از

$$\sigma_n=\lambda_n^2=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,\qquad y_n=\cos\frac{n\pi}{L}x,\qquad \sin\frac{n\pi}{L}x,\qquad n=1,2,\ldots.$$

**مثال ۲۴.** *مقادیر و توابع ویژه‌ی مسأله‌ی اشتورم-لیوویل زیر را بیابید، که در آن $h>0$ عدد ثابت است،*

$$\begin{cases} y''+\sigma y=0, & 0<x<L \\ y(0)=0 \\ y(L)+hy'(L)=0. \end{cases}$$

**حل** معادله شاخص معادله دیفرانسیل $y''+\sigma y=0$ عبارت است از $r^2+\sigma=0$، پس $r=\pm\sqrt{-\sigma}$، و مشابه مثال قبل سه حالت در نظر می‌گیریم: $\sigma=0$، $\sigma<0$، و $\sigma>0$.

حالت اول: $\sigma=0$. در این حالت داریم $y''=0$. در نتیجه جواب عمومی معادله عبارت است از

$$y(x)=c_1x+c_2.$$

چون $y(0)=0$، داریم $c_2=0$، پس $y(x)=c_1x$. اکنون چون $y(L)+hy'(L)=0$، داریم $c_1L+hc_1=0$، که نتیجه می‌دهد $y(x)=0$. از این‌رو در این حالت مسأله فقط جواب بدیهی دارد. پس $\sigma=0$ مقدار ویژه نیست.

حالت دوم: $\sigma=-\lambda^2$، که در آن $\lambda=\sqrt{-\sigma}>0$. در این حالت داریم $y''-\lambda^2y=0$. در نتیجه جواب عمومی معادله عبارت است از

$$y(x)=c_1\cosh\lambda x+c_2\sinh\lambda x.$$

چون $y(0)=0$، خواهیم داشت $c_1=0$، و در نتیجه $y(x)=c_2\sinh\lambda x$. اکنون چون $y(L)+hy'(L)=0$، داریم

$$c_2\sinh\lambda L+h\lambda c_2\cosh\lambda L=0.$$

پس $c_2=0$ یا $\sinh\lambda L+h\lambda\cosh\lambda L=0$. در حالت اخیر داریم

$$\tanh\lambda L=-h\lambda.$$

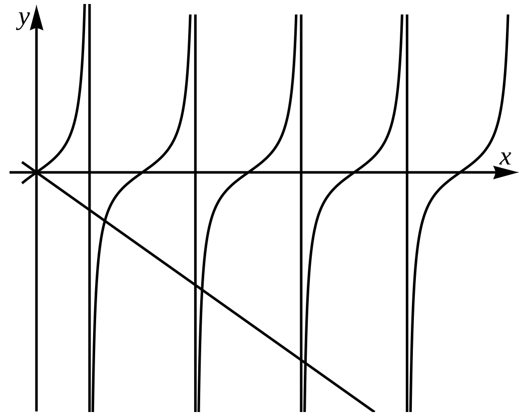
با فرض $\alpha=\lambda L$ می‌توان نوشت

$$\tanh\alpha=\frac{-h}{L}\alpha.$$

با توجه به این‌که منحنی $y=\tanh x$ و خط $y=-\frac{h}{L}x$ فقط در $x=0$ یکدیگر را قطع می‌کنند، نتیجه می‌گیریم که این حالت رخ نمی‌دهد. پس باید داشته باشیم $c_2=0$ و در نتیجه $y(x)=0$. از این‌رو در این حالت مسأله فقط جواب بدیهی دارد. پس $\sigma<0$ مقدار ویژه نیست.

حالت سوم: $\sigma=\lambda^2$، که در آن $\lambda=\sqrt{\sigma}>0$. در این حالت داریم $y''+\lambda^2y=0$. در نتیجه جواب عمومی معادله عبارت است از

$$y(x)=c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x.$$




شکل ۱: معادله‌ی $\tan x = -kx$ بی‌نهایت جواب دارد.

چون $y(\circ) = \circ$، داریم $c_۱ = \circ$، پس $y(x) = c_۲ \sin \lambda x$. اکنون چون $y(L) + hy'(L) = \circ$، خواهیم داشت

$$c_۲ \sin \lambda L + h\lambda c_۲ \cos \lambda L = \circ.$$

پس $c_۲ = \circ$ یا $\sin \lambda L + h\lambda \cos \lambda L = \circ$. در حالت اخیر داریم

$$\tan \lambda L = -h\lambda.$$

با فرض $\alpha = \lambda L$ می‌توان نوشت

$$\tan \alpha = \frac{-h}{L}\alpha.$$

با توجه به این‌که منحنی $y = \tan x$ و خط $y = -\frac{h}{L}x$ در بی‌نهایت نقطه‌ی

$$\alpha_۱ < \alpha_۲ < \alpha_۳ < \cdots$$

یکدیگر را قطع می‌کنند (شکل ۱ راببینید)، داریم $\alpha_n = \lambda_n L$ و بنابراین $\lambda_n = \frac{\alpha_n}{L}$. از این‌رو مقادیر و توابع ویژه‌ی مسأله عبارتند از

$$\sigma_n = \lambda_n^۲ = \left(\frac{\alpha_n}{L}\right)^۲, \qquad y_n = \sin \frac{\alpha_n}{L}x, \qquad ,n = ۱, ۲, ۳, \ldots. \quad \blacksquare$$

**مثال ۲۵.** *مقادیر و توابع ویژه‌ی مسأله‌ی اشتورم-لیوویل زیر را بیابید.*

$$\begin{cases} y'' + y' + \sigma y = \circ, & \circ < x < \pi \\ y(\circ) = \circ \\ y(\pi) = \circ. \end{cases}$$

**حل** چون معادله شاخص معادله دیفرانسیل $y'' + y' + \sigma y = \circ$ (که با فرض $y(x) = e^{rx}$ به دست می‌آید) عبارت است از $r^۲ + r + \sigma = \circ$، پس

$$r = \frac{-۱ \pm \sqrt{۱ - ۴\sigma}}{۲}$$

و در نتیجه باید سه حالت در نظر بگیریم: $۱ - ۴\sigma = \circ$، $۱ - ۴\sigma < \circ$، و $۱ - ۴\sigma > \circ$.

حالت اول: $۱ - ۴\sigma = \circ$، یعنی $\sigma = \frac{۱}{۴}$: در این حالت داریم $r = \frac{-۱}{۲}$. در نتیجه جواب عمومی معادله عبارت است از

$$y(x) = c_۱ e^{-x/۲} + c_۲ x e^{-x/۲}.$$

چون $y(0) = 0$، داریم $c_1 = 0$، پس $y(x) = c_2 x e^{-x/2}$. اکنون چون $y(\pi) = 0$، داریم $c_2 \pi e^{-\pi/2} = 0$، که نتیجه می‌دهد $y(x) = 0$. از این‌رو در این حالت مسأله فقط جواب بدیهی دارد. پس $\sigma = \frac{1}{4}$ مقدار ویژه نیست.

حالت دوم: $1 - 4\sigma = \lambda^2 > 0$، یعنی $\sigma < \frac{1}{4}$، و $\sigma = \dfrac{1-\lambda^2}{2}$. در این حالت داریم $r_1, r_2 = \dfrac{-1}{2} \pm \dfrac{\lambda}{2}$. در نتیجه جواب عمومی معادله عبارت است از

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}.$$

چون $y(0) = 0$، داریم $c_1 + c_2 = 0$، و چون $y(\pi) = 0$، داریم $c_1 e^{r_1\pi} + c_2 e^{r_2\pi} = 0$. پس $c_1 = c_2 = 0$ و در نتیجه $y(x) = 0$. از این‌رو در این حالت مسأله فقط جواب بدیهی دارد. پس $\sigma < \frac{1}{4}$ مقدار ویژه نیست.

حالت دوم: $1 - 4\sigma = -\lambda^2 < 0$، یعنی $\sigma > \frac{1}{4}$، و $\sigma = \dfrac{1+\lambda^2}{2}$. در این حالت داریم $r_1, r_2 = \dfrac{-1}{2} \pm i\dfrac{\lambda}{2}$. در نتیجه جواب عمومی معادله عبارت است از

$$y(x) = c_1 e^{-x/2} \cos \frac{\lambda}{2} x + c_2 e^{-x/2} \sin \frac{\lambda}{2} x.$$

چون $y(0) = 0$، داریم $c_1 = 0$، پس $y(x) = c_2 e^{-x/2} \sin \frac{\lambda}{2} x$. اکنون چون $y(\pi) = 0$، داریم $c_2 e^{-\pi/2} \sin \frac{\lambda}{2}\pi = 0$. پس $c_2 = 0$ یا $\sin \frac{\lambda}{2}\pi = 0$. اگر $\sin \frac{\lambda}{2}\pi = 0$، آن‌گاه $\lambda = 2n$. پس اگر $\lambda = 2n$، $n = 1, 2, 3, \ldots$، آن‌گاه می‌توان $c_2$ را ناصفر گرفت و جواب‌های نابدیهی از مسأله را یافت. بنابراین جواب‌های متناظر $\lambda_n = 2n$، $n = 1, 2, 3, \ldots$، عبارتند از $c_2 e^{-x/2} \sin nx$. از این‌رو مقادیر و توابع ویژه‌ی مسأله عبارتند از

$$\sigma_n = \frac{1+\lambda_n^2}{2} = \frac{1+4n^2}{2}, \quad y_n(x) = e^{-x/2} \sin nx. \quad \blacksquare$$

# خلاصه قسمتی از فصل‌های ۴ و ۵، معادلات با مشتقات جزئی همگن در حالت متناهی

## جلسه پنجم ۲۴ تیرماه ۱۳۹۳

برخی معادلات (همگن) با مشتقات جزیی مهم:

$u_{xx} = a^2 u_t$ معادله گرمای یک بعدی

$u_{xx} + u_{yy} = a^2 u_t$ معادله گرمای دو بعدی

$u_{xx} = a^2 u_{tt}$ معادله موج یک بعدی

$u_{xx} + u_{yy} = 0$ معادله گرمای دو بعدی مستقل از زمان (معادله لاپلاس)

تابع مجهول در معادله‌های بالا، به ترتیب، تابع $u = u(x,t)$، $u = u(x,y,t)$، $u = u(x,t)$، $u = u(x,y)$ است. فرض می‌کنیم $t \geq 0$ (پارامتر $t$ نشان‌دهنده‌ی زمان است)، $a_1 < x < b_1$، $c_1 < y < d_1$، حالت‌های $a_1, c_1 = -\infty$ و $b_1, d_1 = +\infty$ نیز امکان‌پذیر هستند. برای تعیین تابع $u$ از معادله به تعدادی شرط نیاز داریم. تعداد شرط‌ها برای هرمتغیر برابر مرتبه‌ی مشتق نسبت به هر متغیر است. مثلاً در معادله‌ی گرمای یک بعدی یک شرط متناظر $t$ و دو شرط متناظر $x$ داریم. شرایط متناظر $t$ را شرایط اولیه و شرایط متناظر $x$ را شرایط مرزی می‌نامیم. برای حل معادله از روش جداسازی متغیرها استفاده می‌کنیم. برای استفاده از این روش لازم است که معادله و شرایط مرزی، همگن باشند.

اگر $u = u(x,y)$، آن‌گاه با قرار دادن $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ می‌توان $u$ را به عنوان تابعی از $(r,\theta)$ در نظر گرفت. با استفاده از قاعده‌ی زنجیری می‌توان نشان داد که $u_{xx}+u_{yy} = u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$. بنابراین معادله‌ی لاپلاس در مختصات قطبی عبارت است از

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0.$$

# چند مثال

در مثال‌های بعد روش جداسازی متغیرها را تشریح می‌کنیم.

**مثال ۲۶.** *معادله با شرایط مرزی زیر را حل کنید*

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \tag{2}$$

$$u(0,t) = 0 \tag{3}$$

$$u(\pi,t) = 0 \tag{4}$$

$$u(x,0) = f(x) \tag{5}$$

**حل** ابتدا می‌خواهیم جواب معادله‌ی (۲) که در شرایط مرزی (۳)-(۴) صدق می‌کند را بیابیم. واضح است که $u(x,t) = 0$ هم در معادله و هم در شرایط مرزی صدق می‌کند، که آن‌را جواب بدیهی گوییم. برای یافتن جواب‌های نابدیهی ابتدا جواب‌هایی به صورت حاصل‌ضرب دو تابع بر حسب $x$ و $t$ را می‌یابیم، یعنی قرار می‌دهیم

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

داریم

$$u_t(x,t) = X(x)T'(t), \quad u_{xx}(x,t) = X''(x)T(t)$$

و در نتیجه

$$X(x)T'(t) = a^{۲}X''(x)T(t).$$

از این‌رو

$$\frac{T'}{a^{۲}T} = \frac{X''}{X}.$$

چون سمت چپ رابطه‌ی بالا تابعی بر حسب $t$ و طرف راست آن تابعی بر حسب $x$ است، پس باید مقداری ثابت باشد، یعنی

$$\frac{T'}{a^{۲}T} = \frac{X''}{X} = -\sigma.$$

که نتیجه می‌دهد

$$X'' + \sigma X = ۰, \quad T' = -a^{۲}\sigma T.$$

اکنون چون $u(۰,t) = ۰$، داریم $X(۰)T(t) = ۰$ و چون $T(t)$ متحد با صفر نیست، داریم

$$X(۰) = ۰.$$

از طرف دیگر چون $u(\pi,t) = ۰$، داریم $X(\pi)T(t) = ۰$ و چون $T(t)$ متحد با صفر نیست، داریم

$$X(\pi) = ۰.$$

از این‌رو یک مسأله به صورت زیر برای $X(x)$ داریم

$$\begin{cases} X'' + \sigma X = ۰, & ۰ < x < \pi \\ X(۰) = ۰ \\ X(\pi) = ۰ \end{cases} \tag{۶}$$

که یک مسأله‌ی اشتورم-لیوویل (مسأله‌ی مقدارمرزی) است. باید جواب‌های غیر بدیهی و مقادیر $\sigma$ که به ازای آن‌ها جواب نابدیهی وجود دارد را تعیین کنیم، یعنی توابع و مقادیر ویژه‌ی مسأله را بیابیم. در مثال ۲۱ دیدیم که مقادیر و توابع ویژه مسأله‌ی (۶) عبارتند از

$$\sigma_n = \lambda_n^{۲} = n^{۲}, \quad X_n(x) = \sin nx, \quad n = ۱, ۲, ۳, \ldots.$$

اکنون جواب‌های متناظر $T(t)$ را می‌یابیم. چون $T' = -a^{۲}\sigma T$، متناظر مقدار ویژه‌ی $\sigma = \lambda^{۲} = n^{۲}$ داریم $T_n(t) = e^{-a^{۲}n^{۲}t}$. در نتیجه جواب‌های حاصل‌ضربی معادله‌ی $u_t(x,t) = a^{۲}u_{xx}(x,t)$ که در شرایط مرزی $u(۰,t) = ۰$ و $u(\pi,t) = ۰$ صدق می‌کند عبارتند از

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = e^{-a^{۲}n^{۲}t}\sin nx, \quad n = ۱, ۲, ۳, \ldots.$$

از این‌رو کلی‌ترین جواب (جواب عمومی) معادله‌ی (۲) که در شرایط مرزی (۳) و (۴) صدق می‌کند، ترکیب خطی همه‌ی جواب‌های حاصل صربی است، و عبارت است از

$$u(x,t) = \sum_{n=۱}^{\infty} B_n X_n(x)T_n(t) = \sum_{n=۱}^{\infty} B_n e^{-a^{۲}n^{۲}t}\sin nx.$$

اکنون با استفاده از شرط اولیه‌ی (۵) ضرایب مجهول $B_n$ را تعیین می‌کنیم. چون داریم
$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx$$
و در نتیجه $B_n$ همان ضریب سری فوریه‌ی سینوسی $f(x)$ است، یعنی
$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$
با مشخص بودن $f(x)$ ضرایب $B_n$ و در نتیجه جواب مسأله به دست می‌آید. ■

**مثال ۲۷.** *معادله با شرایط مرزی زیر را حل کنید*

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \tag{7}$$
$$u_x(0, t) = 0 \tag{8}$$
$$u_x(\pi, t) = 0 \tag{9}$$
$$u(x, 0) = f(x) \tag{10}$$

**حل** ابتدا جواب معادله‌ی (۷) که در شرایط مرزی (۸)-(۹) صدق می‌کند را می‌یابیم. قرار می‌دهیم
$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

داریم
$$u_t(x, t) = X(x)T'(t), \quad u_{xx}(x, t) = X''(x)T(t)$$

و در نتیجه
$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t).$$

از این‌رو
$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X}.$$
چون سمت چپ رابطه‌ی بالا تابعی بر حسب $t$ و طرف راست آن تابعی بر حسب $x$ است، پس باید مقداری ثابت باشد، یعنی
$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\sigma.$$

که نتیجه می‌دهد
$$X'' + \sigma X = 0, \qquad T' = -a^2\sigma T.$$

اکنون چون $u_x(0, t) = 0$، داریم $X'(0)T(t) = 0$ و چون $T(t)$ متحد با صفر نیست، داریم
$$X'(0) = 0.$$

از طرف دیگر چون $u_x(\pi, t) = 0$، داریم $X'(\pi)T(t) = 0$ و چون $T(t)$ متحد با صفر نیست، داریم
$$X'(\pi) = 0.$$

از این‌رو یک مسأله مقدار مرزی به صورت زیر برای $X(x)$ داریم

$$\begin{cases} X'' + \sigma X = 0, & 0 < x < \pi \\ X'(0) = 0 \\ X'(\pi) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

در مثال ۲۵ دیدیم که مقادیر و توابع ویژه‌ی مسأله‌ی (۱۱) عبارتند از

$$\sigma_0 = \lambda_0 = 0, \quad X_0(x) = 1$$
$$\sigma_n = \lambda_n^2 = n^2, \quad X_n(x) = \cos nx, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

اکنون جواب‌های متناظر $T(t)$ را می‌یابیم. چون داریم $T' = -a^2\sigma T$، متناظر $\sigma = 0$ داریم $T_0(t) = 1$؛ و متناظر $\sigma = \lambda^2 = n^2$ داریم $T_n(t) = e^{-a^2n^2t}$. در نتیجه جواب‌های حاصل‌ضربی معادله‌ی $u_t = a^2u_{xx}$ که در شرایط مرزی $u_x(0, t) = 0$ و $u_x(\pi, t) = 0$ صدق می‌کند عبارتند از

$$u_0(x, t) = X_0(x)T_0(t) = 1$$
$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = e^{-a^2n^2t}\cos nx, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

از این‌رو کلی‌ترین جواب (جواب عمومی) معادله دیفرانسیل $u_t(x, t) = a^2u_{xx}(x, t)$ که در شرایط مرزی $u_x(0, t) = 0$ و $u_x(\pi, t) = 0$ صدق می‌کند عبارت است از

$$\begin{aligned} u(x, t) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) T_n(t) \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-a^2n^2t}\cos nx. \end{aligned}$$

اکنون با استفاده از شرط اولیه‌ی $u(x, 0) = f(x)$ ضرایب مجهول را تعیین می‌کنیم. چون داریم

$$f(x) = u(x, 0) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx$$

و در نتیجه ضرایب با استفاده از سری فوریه‌ی کسینوسی $f(x)$ به دست می‌آیند. بنابراین

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx, \qquad A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$

با مشخص بودن $f(x)$ ضرایب $A_n$ و در نتیجه جواب مسأله به دست می‌آید. ■

**مثال ۲۸.** *معادله موج با شرایط مرزی زیر را حل کنید*

$$u_{tt} = a^2u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \tag{12}$$
$$u(0, t) = 0 \tag{13}$$
$$u(\pi, t) = 0 \tag{14}$$
$$u(x, 0) = f(x) \tag{15}$$
$$u_t(x, 0) = g(x) \tag{16}$$

**حل** ابتدا می‌خواهیم جواب معادله‌ی (۱۲) که در شرایط مرزی (۱۳) و (۱۴) صدق می‌کنند را بیابیم. برای یافتن جواب‌های نابدیهی ابتدا جواب‌هایی به صورت حاصل‌ضرب دو تابع بر حسب $x$ و $t$ را می‌یابیم، یعنی قرار می‌دهیم

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

داریم

$$u_{tt}(x,t) = X(t)T''(t), \quad u_{xx}(x,t) = X''(x)T(t)$$

و در نتیجه

$$X(x)T''(t) = a^۲ X''(x)T(t).$$

از این‌رو

$$\frac{T''}{a^۲ T} = \frac{X''}{X}.$$

چون سمت چپ رابطه‌ی بالا تابعی بر حسب $t$ و طرف چپ آن تابعی بر حسب $x$ است، پس باید مقداری ثابت باشد، یعنی

$$\frac{T''}{a^۲ T} = \frac{X''}{X} = -\sigma.$$

که نتیجه می‌دهد

$$X'' + \sigma X = ۰, \quad T'' + a^۲ \sigma T = ۰.$$

اکنون چون $u(۰,t) = ۰$، داریم $X(۰)T(t) = ۰$ و چون $T(t)$ متحد با صفر نیست، داریم

$$X(۰) = ۰.$$

از طرف دیگر چون $u(\pi,t) = ۰$، داریم $X(\pi)T(t) = ۰$ و چون $T(t)$ متحد با صفر نیست، داریم

$$X(\pi) = ۰.$$

از این‌رو یک مسأله به صورت زیر برای $X(x)$ داریم

$$\begin{cases} X'' + \sigma X = ۰, & ۰ < x < \pi \\ X(۰) = ۰ \\ X(\pi) = ۰ \end{cases} \qquad (۱۷)$$

مقادیر و توابع ویژه مسأله‌ی (۱۷) عبارتند از

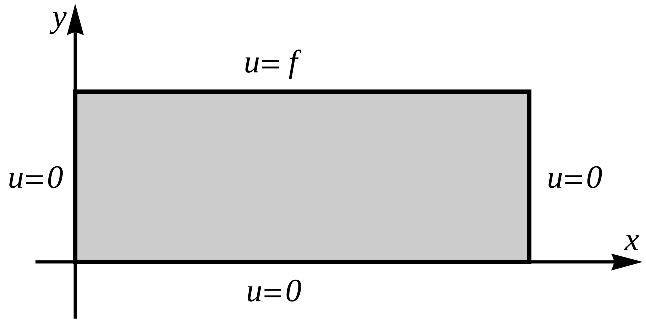
$$\sigma_n = \lambda_n^۲ = n^۲, \quad X_n(x) = \sin nx, \qquad n = ۱, ۲, ۳, \ldots.$$

اکنون جواب‌های متناظر $T(t)$ را به دست می‌آوریم. چون داریم $T'' + a^۲\sigma T = ۰$، متناظر $\sigma = \lambda^۲ = n^۲$ داریم

$$T_n(t) = A_n \cos ant + B_n \sin ant.$$

در نتیجه جواب‌های حاصل‌ضربی معادله‌ی $u_{tt}(x,t) = a^۲ u_{xx}(x,t)$ که در شرایط مرزی $u(۰,t) = ۰$ و $u(\pi,t) = ۰$ صدق می‌کند عبارتند از

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= X_n(x)T_n(t) \\ &= (A_n \cos ant + B_n \sin ant) \sin nx, \qquad n = ۱, ۲, ۳, \ldots. \end{aligned}$$




شکل ۲: معادله‌ی لاپلاس روی یک مستطیل

از این‌رو کلی‌ترین جواب (جواب عمومی) معادله‌ی (۱۲) که در شرایط مرزی (۱۳) و (۱۴) صدق می‌کند عبارت است از

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos ant+B_n\sin ant)\sin nx.$$

اکنون با استفاده از شرایط اولیه‌ی (۱۵) و (۱۶) ضرایب مجهول را تعیین می‌کنیم. چون داریم

$$f(x)=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin nx.$$

و در نتیجه $A_n$ ضریب سری فوریه‌ی سینوسی $f(x)$ است، یعنی

$$A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx.$$

علاوه بر آن چون داریم

$$g(x)=u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}anB_n\sin nx.$$

و در نتیجه $anB_n$ ضریب سری فوریه‌ی سینوسی $g(x)$ است، یعنی

$$B_n=\frac{2}{an\pi}\int_0^{\pi}g(x)\sin nx\,dx. \quad \blacksquare$$

**مثال ۲۹.** *معادله لاپلاس با شرایط مرزی زیر را حل کنید. (شکل ۲ را ببینید.)*

$$u_{xx}+u_{yy}=0,\quad 0<x<a,\ 0<y<b \tag{۱۸}$$

$$u(0,y)=0 \tag{۱۹}$$

$$u(a,y)=0 \tag{۲۰}$$

$$u(x,0)=0 \tag{۲۱}$$

$$u(x,b)=f(x) \tag{۲۲}$$

**حل** ابتدا جواب‌های حاصل‌ضربی معادله‌ی (۱۸) که در شرایط مرزی (۱۹)-(۲۱) صدق می‌کند را می‌یابیم. قرار می‌دهیم $u(x,y)=X(x)Y(y)$. چون $u(0,y)=0$، داریم $X(0)Y(y)=0$ و چون $Y(y)$ متحد با صفر نیست، داریم

$$X(0)=0.$$

به همین صورت داریم

$$X(a)=0,\quad Y(0)=0.$$

اکنون چون $u_{xx}(x,y)=X''(x)Y(y)$ و $u_{yy}(x,y)=X(y)Y''(y)$، با قرار دادن در معادله خواهیم داشت
$$X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)=0.$$

از این‌رو
$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=-\sigma,$$

که در آن $\sigma$ مقداری ثابت است. در نتیجه
$$X''+\sigma X=0,\qquad Y''-\sigma Y=0.$$

از این‌رو یک مسأله‌ی مقدار مرزی به صورت زیر برای $X(x)$ داریم
$$\begin{cases} X''+\sigma X=0, & 0<x<a\\ X(0)=0\\ X(a)=0\end{cases}\tag{۲۳}$$

مقادیر و توابع ویژه مسأله‌ی (۲۳) عبارتند از
$$\sigma_n=\lambda_n^2=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2,\quad X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{a},\qquad n=1,2,3,\ldots.$$

اکنون جواب‌های متناظر $Y(y)$ را می‌یابیم. جواب عمومی $Y''-\sigma Y=0$ عبارت است از
$$Y(y)=c_1\cosh\lambda y+c_2\sinh\lambda y.$$

چون $Y(0)=0$ داریم $Y(y)=c_2\sinh\lambda x$. از این‌رو جواب متناظر $\sigma_n=\lambda_n^2=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ عبارت است از
$$Y_n(y)=\sinh\lambda_n y.$$

در نتیجه جواب‌های حاصل‌ضربی معادله‌ی (۱۸) که در شرایط مرزی (۱۹)-(۲۱) صدق می‌کند عبارتند از
$$u_n(x,y)=X_n(x)Y_n(y)=\sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a},\qquad n=1,2,3,\ldots.$$

از این‌رو کلی‌ترین جواب (جواب عمومی) معادله‌ی (۱۸) که در شرایط مرزی (۱۹)-(۲۱) صدق می‌کند عبارت است از
$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a}.$$

اکنون با استفاده از شرط اولیه‌ی (۲۲) ضرایب مجهول را تعیین می‌کنیم. چون داریم
$$f(x)=u(x,b)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi b}{a}$$

با استفاده از سری فوریه‌ی سینوسی $f(x)$، داریم
$$\sinh\frac{n\pi b}{a}B_n=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx.$$

با مشخص بودن $f(x)$ ضرایب $B_n$ و در نتیجه جواب مسأله به دست می‌آید. ■

# قسمتی از فصل‌های ۴ و ۵، معادلات با مشتقات جزئی همگن در حالت نامتناهی

## جلسه ششم ۲۹ تیرماه ۱۳۹۳

در حالتی که فاصله‌ی مورد بررسی نامتناهی باشد، شرط مرزی همگنی که باید در نظر گرفته شود شرط کراندار بودن تابع مجهول $u$ است. در مثال‌های بعد این مطلب را تشریح می‌کنیم.

**مثال ۳۰.** *(معادله‌ی گرما برای میله‌ی نامتناهی) معادله با شرایط مرزی زیر را حل کنید*

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty \quad t > 0 \tag{۲۴}$$

$$u(x,t) \text{ کران‌دار وقتی } x \to \pm\infty \tag{۲۵}$$

$$u(x,0) = f(x) \tag{۲۶}$$

**حل** ابتدا جواب‌های حاصل‌ضربی معادله‌ی (۲۴) که در شرایط مرزی (۲۵) صدق می‌کند را می‌یابیم. قرار می‌دهیم $u(x,t) = X(x)T(t)$. در این صورت $u_t(x,t) = X(t)T'(t)$ و $u_{xx}(x,t) = X''(x)T(t)$ و با جای‌گذاری در معادله خواهیم داشت

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\sigma,$$

که در آن $\sigma$ مقدار ثابت است. از این‌رو داریم

$$X'' + \sigma X = 0, \qquad T' = -a^2 \sigma T.$$

اکنون چون وقتی $x \to \pm\infty$، $u(x,t)$ کران‌دار است، پس وقتی $x \to \pm\infty$، $X(x)$ کران‌دار است از این‌رو یک مسأله‌ی مقدار مرزی به صورت زیر برای $X(x)$ داریم

$$\begin{cases} X'' + \sigma X = 0, & -\infty < x < +\infty \\ X(x) \text{ متناهی وقتی } x \to \pm\infty \end{cases} \tag{۲۷}$$

برای یافتن جواب‌های غیربدیهی مسأله بالا دو حالت برای $\sigma$ در نظر می‌گیریم

حالت اول: $\sigma = -\lambda^2$، که در آن $\lambda > 0$. در این حالت مسأله‌ی (۲۷) به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{cases} X'' - \lambda^2 X = 0, & -\infty < x < +\infty \\ X(x) \text{ متناهی وقتی } x \to \pm\infty \end{cases}$$

جواب عمومی معادله‌ی $X'' - \lambda^2 X = 0$ عبارت است از

$$X(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}.$$

چون $\lim_{x\to+\infty} e^{\lambda x} = +\infty$ و $X(x)$ ، وقتی $x \to +\infty$، کران‌دار است، داریم $c_1 = 0$ و در نتیجه $X(x) = c_2 e^{-\lambda x}$. چون $\lim_{x\to-\infty} e^{-\lambda x} = +\infty$ و $X(x)$ ، وقتی $x \to -\infty$، کران‌دار است داریم $c_2 = 0$. از این‌رو $X(x) = 0$ و در این حالت فقط جواب بدیهی داریم.

حالت دوم: $\sigma = \lambda^2$، که در آن $\lambda > 0$. در این حالت مسأله‌ی (۲۷) به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, & -\infty < x < +\infty \\ X(x) \text{ متناهی وقتی } x \to \pm\infty \end{cases}$$

جواب عمومی معادله‌ی $X'' + \lambda^2 X = 0$ عبارت است از

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x.$$

چون $|\sin \lambda x| \le 1$ و $|\cos \lambda x| \le 1$، تابع $X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$ وقتی $x \to \pm\infty$ کران‌دار است، پس به ازای هر $\lambda$ جواب $X_\lambda(x) = A_\lambda \cos \lambda x + B_\lambda \sin \lambda x$ یک جواب غیر بدیهی از مسأله‌ی (۲۷) است. اکنون جواب‌های متناظر $T(t)$ را می‌یابیم. چون $T' = -a^2 \sigma T$، متناظر $\sigma = \lambda^2$ داریم $T_\lambda(t) = e^{-a^2\lambda^2 t}$. در نتیجه جواب‌های حاصل‌ضربی معادله‌ی (۲۴) که در شرایط مرزی (۲۵) صدق می‌کند عبارتند از

$$\begin{aligned} u_\lambda(x,t) &= X_\lambda(x) T_\lambda(t) \\ &= e^{-a^2\lambda^2 t}(A_\lambda \cos \lambda x + B_\lambda \sin \lambda x), \quad \lambda > 0. \end{aligned}$$

از این‌رو کلی‌ترین جواب (جواب عمومی) معادله‌ی (۲۴) که در شرایط مرزی (۲۵) صدق می‌کند عبارت است از

$$u(x,t) = \int_0^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}(A_\lambda \cos \lambda x + B_\lambda \sin \lambda x)\, d\lambda.$$

اکنون با استفاده از شرط اولیه‌ی (۲۶) ضرایب مجهول را تعیین می‌کنیم. چون داریم

$$f(x) = u(x,0) = \int_0^{+\infty} (A_\lambda \cos \lambda x + B_\lambda \sin \lambda x)\, d\lambda$$

و در نتیجه با استفاده از انتگرال فوریه $f(x)$ ضرایب را می‌یابیم:

$$A_\lambda = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \lambda x\, dx, \quad B_\lambda = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x\, dx.$$

با مشخص بودن $f(x)$ ضرایب $A_\lambda$ و $B_\lambda$؛ و در نتیجه جواب مسأله به دست می‌آید. ■

**مثال ۳۱.** (*معادله‌ی گرمای نیمه متناهی*) *معادله با شرایط مرزی زیر را حل کنید*

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0 \qquad (۲۸)$$

$$u(0,t) = 0 \qquad (۲۹)$$

$$u(x,t) \text{ کران‌دار وقتی } x \to +\infty \qquad (۳۰)$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad (۳۱)$$

**حل** ابتدا جواب‌های حاصل‌ضربی معادله‌ی (۲۸) که در شرایط مرزی (۲۹)-(۳۰) صدق می‌کند را دست می‌آوریم. قرار می‌دهیم $u(x,t) = X(x)T(t)$. در این صورت داریم $u_t(x,t) = X(t)T'(t)$ و $u_{xx}(x,t) = X''(x)T(t)$ و با جای‌گذاری در معادله خواهیم داشت

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\sigma,$$

که در آن $\sigma$ مقدار ثابت است. از این‌رو داریم

$$X'' + \sigma X = 0, \quad T' = -a^2 \sigma T.$$

اکنون چون $u(0,t) = 0$، داریم $X(0)T(t) = 0$ و چون $T(t)$ متحد با صفر نیست، داریم

$$X(0) = 0.$$

از طرف دیگر چون وقتی $x \to +\infty$، $u(x,t)$ کران‌دار است، پس $x \to +\infty$، $X(x)$ کران‌دار است از این‌رو یک مسأله‌ی مقدار مرزی به صورت زیر برای $X(x)$ داریم

$$\begin{cases} X'' + \sigma X = ۰, \quad ۰ < x < +\infty \\ X(۰) = ۰ \\ X(x) \text{ متناهی وقتی } x \to +\infty \end{cases} \qquad (۳۲)$$

برای یافتن جواب‌های غیربدیهی مسأله بالا دو حالت برای $\sigma$ در نظر می‌گیریم

حالت اول: $\sigma = -\lambda^۲$، که در آن $\lambda > ۰$. در این حالت مسأله‌ی (۳۲) به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{cases} X'' - \lambda^۲ X = ۰, \quad ۰ < x < +\infty \\ X(۰) = ۰ \\ X(x) \text{ متناهی وقتی } x \to +\infty \end{cases}$$

جواب عمومی معادله‌ی $X'' - \lambda^۲ X = ۰$ عبارت است از

$$X(x) = c_۱ \cosh \lambda x + c_۲ \sinh \lambda x.$$

چون $X(۰) = ۰$ داریم $c_۱ = ۰$ و در نتیجه $X(x) = c_۲ \sinh \lambda x$. اکنون چون $X(x)$، وقتی که $x \to +\infty$، کران‌دار است، داریم $c_۲ = ۰$، زیرا $\lim_{x\to+\infty} \sinh \lambda x = +\infty$. از این‌رو $X(x) = ۰$ و در این حالت فقط جواب بدیهی داریم.

حالت دوم: $\sigma = \lambda^۲$، که در آن $\lambda > ۰$. در این حالت مسأله‌ی (۳۲) به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{cases} X'' + \lambda^۲ X = ۰, \quad ۰ < x < +\infty \\ X(۰) = ۰ \\ X(x) \text{ متناهی وقتی } x \to +\infty \end{cases}$$

جواب عمومی معادله‌ی $X'' + \lambda^۲ X = ۰$ عبارت است از

$$X(x) = c_۱ \cos \lambda x + c_۲ \sin \lambda x.$$

چون $X(۰) = ۰$ داریم $c_۱ = ۰$ و در نتیجه داریم $X(x) = c_۲ \sin \lambda x$. اکنون چون $X(x)$ وقتی $x \to +\infty$ کران‌دار است، پس به ازای هر $\lambda$ جواب $X_\lambda(x) = \sin \lambda x$ یک جواب غیر بدیهی از مسأله‌ی (۳۲) است. اکنون جواب‌های متناظر $T(t)$ را می‌یابیم. چون $T' = -a^۲\sigma T$، متناظر $\sigma = \lambda^۲$ داریم $T_\lambda(t) = e^{-a^۲\lambda^۲ t}$. در نتیجه جواب‌های حاصل‌ضربی معادله‌ی (۲۸) که در شرایط مرزی (۲۹) و (۳۰) صدق می‌کند عبارتند از

$$\begin{aligned} u_\lambda(x,t) &= X_\lambda(x) T_\lambda(t) \\ &= e^{-a^۲\lambda^۲ t} \sin \lambda x, \qquad \lambda > ۰. \end{aligned}$$

از این‌رو کلی‌ترین جواب (جواب عمومی) معادله‌ی (۲۸) که در شرایط مرزی (۲۹) و (۳۰) صدق می‌کند عبارت است از

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_۰^{+\infty} B_\lambda X_\lambda(x) T_\lambda(t)\, d\lambda \\ &= \int_۰^{+\infty} B_\lambda e^{-a^۲\lambda^۲ t} \sin \lambda x \, d\lambda. \end{aligned}$$

اکنون با استفاده از شرط اولیه‌ی (۳۱) ضرایب مجهول $B_\lambda$ را تعیین می‌کنیم. چون داریم

$$f(x) = u(x, \circ) = \int_\circ^{+\infty} B_\lambda \sin \lambda x \, d\lambda$$

و در نتیجه $B_\lambda$ ضریب انتگرال فوریه‌ی سینوسی $f(x)$ است، یعنی

$$B_\lambda = \frac{۲}{\pi} \int_\circ^{+\infty} f(x) \sin \lambda x \, dx.$$

بنابراین

$$u(x, t) = \frac{۲}{\pi} \int_\circ^{+\infty} \left[ \int_\circ^{+\infty} f(z) e^{-a^۲ \lambda^۲ t} \sin \lambda z \sin \lambda x \, dz \right] d\lambda.$$

با مشخص بودن $f(x)$ ضرایب $B_\lambda$ و در نتیجه جواب مسأله به دست می‌آید. ■

**مثال ۳۲.** *معادله موج نیمه متناهی با شرایط مرزی داده شده را حل کنید*

$$u_{tt} = a^۲ u_{xx}, \quad \circ < x < +\infty \quad t > \circ \tag{۳۳}$$

$$u_x(\circ, t) = \circ \tag{۳۴}$$

$$u(x,t) \text{ متناهی وقتی که } x \to +\infty \tag{۳۵}$$

$$u(x, \circ) = f(x) \tag{۳۶}$$

$$u_t(x, \circ) = g(x) \tag{۳۷}$$

**حل** ابتدا می‌خواهیم جواب معادله‌ی (۳۳) را که در شرایط مرزی (۳۴)-(۳۵) صدق می‌کند را بیابیم. برای یافتن جواب‌های نابدیهی مسأله ابتدا جواب‌هایی به صورت حاصل‌ضرب دو تابع بر حسب $x$ و $t$ را می‌یابیم، یعنی قرار می‌دهیم $u(x,t) = X(x)T(t)$. در این صورت خواهیم داشت $u_{tt}(x,t) = X(t)T''(t)$ و $u_{xx}(x,t) = X''(x)T(t)$ و در نتیجه $X(x)T''(t) = a^۲ X''(x)T(t)$. از این‌رو

$$\frac{T''}{a^۲ T} = \frac{X''}{X} = -\sigma,$$

که در آن $\sigma$ مقداری ثابت است. در نتیجه

$$X'' + \sigma X = \circ, \qquad T'' + a^۲ \sigma T = \circ.$$

اکنون چون $u_x(\circ, t) = \circ$، داریم $X'(\circ)T(t) = \circ$ و چون $T(t)$ متحد با صفر نیست، داریم

$$X'(\circ) = \circ.$$

از طرف دیگر چون وقتی $x \to +\infty$، تابع $u(x,t) = X(x)T(t)$ متناهی است، وقتی $x \to +\infty$ تابع $X(x)$ متناهی است.
از این‌رو یک مسأله به صورت زیر برای $X(x)$ داریم

$$\begin{cases} X'' + \sigma X = \circ, \circ < x < +\infty \\ X'(\circ) = \circ \\ X(x) \text{ متناهی وقتی که } x \to +\infty \end{cases} \tag{۳۸}$$

مانند مثال‌های معادله‌ی گرمای نامتناهی می‌توان دید که $\sigma = \lambda^۲$ و به ازای هر $\lambda > \circ$ جواب $X_\lambda(x) = \cos \lambda x$ را داریم.
اکنون جواب‌های متناظر $T(t)$ را می‌یابیم. چون $T'' + a^۲ \lambda^۲ T = \circ$، متناظر $\sigma = \lambda^۲$ داریم $T_\lambda(t) = A_\lambda \cos a\lambda t +$

$B_\lambda \sin a\lambda t$. در نتیجه جواب‌های حاصل‌ضربی معادله‌ی $u_{tt}(x,t) = a^۲ u_{xx}(x,t)$ که در شرایط مرزی $u(۰,t) = ۰$ و $u(x,t)$ متناهی وقتی $x \to +\infty$ صدق می‌کند عبارتند از

$$u_\lambda(x,t) = X_\lambda(x)T_\lambda(t) = (A_\lambda \cos a\lambda t + B_\lambda \sin a\lambda t)\cos \lambda x, \qquad \forall \lambda > ۰.$$

از این‌رو کلی‌ترین جواب (جواب عمومی) معادله‌ی (۳۳) که در شرایط مرزی (۳۴) و (۳۵) صدق می‌کند عبارت است از

$$u(x,t) = \int_۰^{+\infty} (A_\lambda \cos a\lambda t + B_\lambda \sin a\lambda t)\sin \lambda x \, d\lambda.$$

اکنون با استفاده از شرایط اولیه‌ی (۳۶) و (۳۷) ضرایب مجهول را تعیین می‌کنیم. چون داریم

$$f(x) = u(x,۰) = \int_۰^{+\infty} A_\lambda \cos \lambda x \, dx.$$

و در نتیجه $A_\lambda$ ضریب انتگرال فوریه‌ی کسینوسی $f(x)$ است، یعنی

$$A_\lambda = \frac{۲}{\pi}\int_۰^{+\infty} f(x)\cos \lambda x \, dx.$$

علاوه بر آن چون داریم

$$g(x) = u_t(x,۰) = \int_۰^{+\infty} a\lambda B_\lambda \cos \lambda x \, dx.$$

و در نتیجه $\lambda B_\lambda$ ضریب انتگرال فوریه‌ی کسینوسی $g(x)$ است، یعنی

$$B_\lambda = \frac{۲}{a\lambda\pi}\int_۰^{+\infty} g(x)\cos \lambda x \, d\lambda. \quad \blacksquare$$

**مثال ۳۳.** *معادله موج نیمه متناهی با شرایط مرزی داده شده را حل کنید*

$$u_{tt} = a^۲ u_{xx}, \quad ۰ < x < +\infty, \ \ t > ۰ \tag{۳۹}$$

$$u(۰,t) = ۰, \ \ t > ۰ \tag{۴۰}$$

$$u(x,۰) = f(x), \ \ ۰ < x < +\infty \tag{۴۱}$$

$$u_t(x,۰) = g(x), \ \ ۰ < x < +\infty \tag{۴۲}$$

$u(x,t)$ *کراندار وقتی* $x \to +\infty$

**حل** قرار می‌دهیم $u(x,t) = X(x)T(t)$. با قرار دادن در معادله، مطابق معمول خواهیم داشت

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{aT} = -\sigma,$$

که در آن $\sigma$ مقداری ثابت است، و در نتیجه

$$X'' + \sigma X = ۰ \tag{۴۳}$$

$$T'' + a^۲\sigma T = ۰ \tag{۴۴}$$

با توجه به شرط مرزی $X(۰) = ۰$ و کرانداری $X(x)$، حالت $\sigma < ۰$ رد می‌شود. بنابراین $\sigma = \lambda^۲ > ۰$. از این‌رو

$$X(x) = A\cos \lambda x + B\sin \lambda x.$$

چون $X(\circ) = \circ$ داریم $A = \circ$. پس به ازای هر $\lambda > \circ$، یک جواب

$$X_\lambda(x) = \sin \lambda x$$

از (۴۳) داریم. به ازای $\sigma = \lambda^2$ جواب‌های (۴۴) عبارتند از

$$T_\lambda(t) = A_\lambda \cos a\lambda t + B_\lambda \sin a\lambda t, \qquad \lambda > \circ.$$

چون مقادیر $\lambda$ به صورت پیوسته هستند، با انتگرال گرفتن از جواب‌های حاصل‌ضربی جواب مسأله‌ی (۳۹)-(۴۰) را می‌یابیم

$$u(x,t) = \int_\circ^{+\infty} (A_\lambda \cos a\lambda t + B_\lambda \sin a\lambda t) \sin \lambda x \, d\lambda.$$

با استفاده از (۴۱) و (۴۲) ضرایب $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ را می‌یابیم

$$\begin{aligned} f(x) &= u(x,\circ) = \int_\circ^{+\infty} A_\lambda \sin \lambda x \, d\lambda \\ g(x) &= u_t(x,\circ) = \int_\circ^{\infty} a\lambda B_\lambda \sin \lambda x \, d\lambda. \end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از انتگرال فوریه‌ی سینوسی $f$ و $g$، ضرایب $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ عبارتند از

$$\begin{aligned} A_\lambda &= \frac{2}{\pi} \int_\circ^{+\infty} f(z) \sin \lambda z \, dz \\ B_\lambda &= \frac{2}{\pi a \lambda} \int_\circ^{+\infty} g(z) \sin \lambda z \, dz. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**مثال ۳۴.** *معادله لاپلاس با شرایط مرزی زیر را حل کنید*

$$u_{xx} + u_{yy} = \circ, \quad \circ < x < a, \quad \circ < y < b \qquad (۴۵)$$

$$u(\circ, y) = f(y) \qquad (۴۶)$$

$$u(a, y) = g(y) \qquad (۴۷)$$

$$u_y(x, \circ) = \circ \qquad (۴۸)$$

$$u_y(x, b) = \circ \qquad (۴۹)$$

**حل** ابتدا جواب‌های حاصل‌ضربی معادله‌ی (۴۵) که در شرایط مرزی (۴۸)-(۴۹) صدق می‌کند را می‌یابیم. قرار می‌دهیم $u(x,y) = X(x)Y(y)$. چون $u_y(x,\circ) = \circ$، داریم $X(x)Y'(\circ) = \circ$ و بنابراین

$$Y'(\circ) = \circ.$$

به همین صورت داریم

$$Y'(b) = \circ.$$

اکنون چون $u_{xx}(x,y) = X''(x)Y(y)$ و $u_{yy}(x,y) = X(y)Y''(y)$، با قرار دادن در معادله خواهیم داشت

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \sigma,$$

که در آن $\sigma$ مقداری ثابت است. در نتیجه

$$X'' - \sigma X = 0, \qquad Y'' + \sigma Y = 0.$$

از این‌رو یک مسأله‌ی مقدار مرزی به صورت زیر برای $Y(y)$ داریم

$$\begin{cases} Y'' + \sigma Y = 0, & 0 < y < b \\ Y'(0) = 0 \\ Y'(b) = 0 \end{cases} \tag{۵۰}$$

مقادیر و توابع ویژه مسأله‌ی (۵۰) عبارتند از

$$\sigma_0 = \lambda_0 = 0, \quad Y_0(y) = 1$$
$$\sigma_n = \lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \quad Y_n(y) = \cos\frac{n\pi y}{b}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

اکنون جواب‌های متناظر $X(x)$ را می‌یابیم. برای $\sigma = 0$ جواب عمومی $X'' = 0$ عبارت است از

$$X_0(x) = A_0 + B_0 x.$$

برای $\sigma_n = \lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$ جواب عمومی $X'' - \lambda^2 X = 0$ عبارت است از

$$X_n(x) = A_n \cosh\lambda_n x + B_n \sinh\lambda_n x.$$

در نتیجه جواب‌های حاصل‌ضربی معادله‌ی (۴۵) که در شرایط مرزی (۲۱) و (۲۲) صدق می‌کند عبارتند از

$$u_0(x,y) = X_0(x)Y_0(y) = A_0 + B_0 x$$
$$u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = (A_n \cosh\lambda_n x + B_n \sinh\lambda_n x)\cos\lambda_n y, \ n = 1, 2, \ldots.$$

از این‌رو کلی‌ترین جواب (جواب عمومی) معادله‌ی (۴۵) که در شرایط مرزی (۴۸) و (۴۹) صدق می‌کند عبارت است از

$$u(x,y) = A_0 + B_0 x + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cosh\lambda_n x + B_n \sinh\lambda_n x)\cos\frac{n\pi y}{b}.$$

اکنون با استفاده از شرایط اولیه‌ی (۴۶) و (۴۷) ضرایب مجهول را تعیین می‌کنیم. چون داریم

$$f(y) = u(0,y) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi y}{b}.$$

با استفاده از سری فوریه‌ی کسینوسی $f(y)$ داریم

$$A_0 = \frac{1}{b}\int_0^b f(y)\,dy, \qquad A_n = \frac{2}{b}\int_0^b f(y)\cos\lambda_n y\,dy.$$

به همین صورت چون داریم

$$g(y) = u(a,y) = A_0 + B_0 a + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cosh\lambda_n a + B_n \sinh\lambda_n a)\cos\lambda_n y$$

با استفاده از سری فوریه‌ی کسینوسی $g(y)$ به دست می‌آوریم

$$A_0 + B_0 a = \frac{1}{b}\int_0^b g(y)\,dy,$$
$$A_n \cosh\lambda_n a + B_n \sinh\lambda_n a = \frac{2}{b}\int_0^b g(y)\cos\lambda_n y\,dy$$

و بنابراین

$$B_\circ = -\frac{۱}{a}A_\circ + \frac{۱}{ab}\int_\circ^b g(y)\,dy,$$
$$B_n = -A_n\frac{\cosh\lambda_n a}{\sinh\lambda_n a} + \frac{۲}{b\sinh\lambda_n a}\int_\circ^b g(y)\cos\lambda_n y\,dy. \qquad \blacksquare$$

**مثال ۳۵.** *معادله لاپلاس با شرایط داده شده را حل کنید*

$$u_{xx} + u_{yy} = \circ, \quad \circ < x < a, \quad y > \circ \tag{۵۱}$$
$$u(\circ, y) = \circ \tag{۵۲}$$
$$u(a, y) = \circ \tag{۵۳}$$
$$u(x,y) \text{ کران‌دار وقتی } y \to +\infty \tag{۵۴}$$
$$u(x,\circ) = f(x) \tag{۵۵}$$

**حل** ابتدا جواب‌های حاصل‌ضربی معادله‌ی (۵۱) که در شرایط (۵۲)-(۵۴) صدق می‌کند را می‌یابیم. قرار می‌دهیم $u(x,y) = X(x)Y(y)$. چون $u(\circ, y) = \circ$، داریم $X(\circ)Y(y) = \circ$ و در نتیجه

$$X(\circ) = \circ.$$

به همین صورت داریم

$$X(a) = \circ, \qquad Y(y) \text{ کران‌دار وقتی } y \longrightarrow +\infty.$$

اکنون چون $u_{xx}(x,y) = X''(x)Y(y)$ و $u_{yy}(x,y) = X(x)Y''(y)$، با قرار دادن در معادله خواهیم داشت

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = \circ.$$

از این‌رو

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\sigma,$$

که در آن $\sigma$ مقداری ثابت است. بنابراین

$$X'' + \sigma X = \circ, \qquad Y'' - \sigma Y = \circ.$$

از این‌رو یک مسأله‌ی مقدار مرزی به صورت زیر برای $X(x)$ داریم

$$\begin{cases} X'' + \sigma X = \circ, & \circ < x < a \\ X(\circ) = \circ \\ X(a) = \circ \end{cases} \tag{۵۶}$$

مقادیر و توابع ویژه مسأله‌ی (۵۶) عبارتند از

$$\sigma_n = \lambda_n^۲ = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^۲, \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{a}, \qquad n = ۱, ۲, ۳, \ldots.$$

اکنون جواب‌های متناظر $Y(y)$ را می‌یابیم. جواب عمومی $Y'' - \lambda^۲ Y = \circ$ عبارت است از

$$Y(y) = c_۱ e^{\lambda y} + c_۲ e^{-\lambda y}.$$

چون وقتی $y \longrightarrow \infty$، $Y(y)$ متناهی است و $\lim_{y\to+\infty} e^{\lambda y} = +\infty$، داریم $Y(y) = c_۲ e^{-\lambda y}$. پس $Y_n(y) = e^{-\lambda_n y}$ و در نتیجه جواب‌های حاصل‌ضربی معادله‌ی (۵۱) که در شرایط (۵۲)-(۵۴) صدق می‌کنند عبارتند از

$$u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = e^{-\lambda_n y}\sin\frac{n\pi x}{a}, \qquad n = ۱,۲,۳,\ldots.$$

از این‌رو کلی‌ترین جواب (جواب عمومی) معادله‌ی (۵۱) که در شرایط مرزی (۵۲)-(۵۴) صدق می‌کند عبارت است از

$$u(x,y) = \sum_{n=۱}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n y}\sin\frac{n\pi x}{a}.$$

اکنون با استفاده از شرط اولیه‌ی (۵۵) ضرایب مجهول را تعیین می‌کنیم. چون داریم

$$f(x) = u(x,۰) = \sum_{n=۱}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{a}.$$

با استفاده از سری فوریه‌ی سینوسی $f(x)$ داریم

$$A_n = \frac{۲}{a}\int_۰^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx$$

و بنابراین

$$A_n = \frac{۲}{a}\int_۰^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx. \qquad \blacksquare$$

**مثال ۳۶.** *معادله لاپلاس با شرایط داده شده را حل کنید*

$$u_{xx} + u_{yy} = ۰, \quad ۰ < x < a,\ \ y > ۰ \tag{۵۷}$$

$$u(۰,y) = ۰ \tag{۵۸}$$

$$u(a,y) = f(y) \tag{۵۹}$$

$$u(x,۰) = ۰ \tag{۶۰}$$

$$u(x,y) \text{ کران‌دار وقتی } y \to +\infty \tag{۶۱}$$

**حل** ابتدا جواب‌های حاصل‌ضربی معادله‌ی (۵۷) که در شرایط (۵۸)، (۶۰) و (۶۱) صدق می‌کند را می‌یابیم. قرار می‌دهیم $u(x,y) = X(x)Y(y)$. چون $u(۰,y) = ۰$، داریم $X(۰)Y(y) = ۰$ و در نتیجه

$$X(۰) = ۰.$$

به همین صورت داریم

$$Y(۰) = ۰, \qquad Y(y) \text{ کران‌دار وقتی } y \to +\infty.$$

اکنون چون $u_{xx}(x,y) = X''(x)Y(y)$ و $u_{yy}(x,y) = X(y)Y''(y)$، با قرار دادن در معادله خواهیم داشت

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \sigma,$$

که در آن $\sigma$ مقداری ثابت است. در نتیجه

$$X'' - \sigma X = ۰, \qquad Y'' + \sigma Y = ۰.$$

از این‌رو یک مسأله‌ی مقدار مرزی به صورت زیر برای $Y(y)$ داریم

$$\begin{cases} Y'' + \sigma Y = 0, y > 0 \\ Y(0) = 0 \\ Y(y) \text{ کران‌دار وقتی } y \to +\infty \end{cases} \qquad (۶۲)$$

به سادگی می‌توان دید به ازای هر $\lambda > 0$ مسأله‌ی (۶۲) دارای جواب نابدیهی

$$Y_\lambda(y) = \sin \lambda y$$

است. اکنون جواب‌های متناظر $X(x)$ را می‌یابیم. جواب عمومی معادله‌ی $X'' - \lambda^2 X = 0$ عبارت است از

$$X(x) = c_1 \cosh \lambda x + c_2 \sinh \lambda x.$$

چون $X(0) = 0$ داریم $X(x) = c_2 \sinh \lambda x$. پس $X_\lambda(x) = \sinh \lambda x$ و در نتیجه جواب‌های حاصل‌ضربی معادله‌ی (۵۷) که در شرایط (۵۸)، (۶۰) و (۶۱) صدق می‌کنند عبارتند از

$$u_\lambda(x, y) = X_\lambda(x) Y_\lambda(y) = \sinh \lambda x \sin \lambda y, \quad \lambda > 0.$$

از این‌رو کلی‌ترین جواب (جواب عمومی) معادله‌ی (۵۷) که در شرایط (۵۸)، (۶۰) و (۶۱) صدق می‌کند عبارت است از

$$u(x, y) = \int_0^{+\infty} B_\lambda \sinh \lambda x \sin \lambda y \, d\lambda.$$

اکنون با استفاده از شرط اولیه‌ی (۶۱) ضرایب مجهول را تعیین می‌کنیم. چون داریم

$$f(y) = u(a, y) = \int_0^{+\infty} B_\lambda \sinh \lambda a \sin \lambda y \, d\lambda.$$

با استفاده از انتگرال فوریه‌ی سینوسی $f(y)$ داریم

$$B_\lambda \sinh \lambda a = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(y) \sin \lambda y \, dy$$

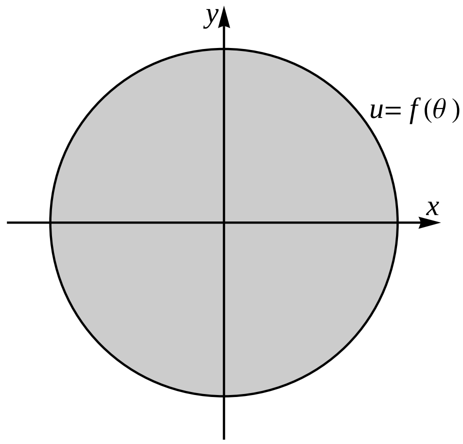
و بنابراین

$$B_\lambda = \frac{2}{\pi \sinh \lambda a} \int_0^{+\infty} f(y) \sin \lambda y \, dy. \quad \blacksquare$$

# قسمتی از فصل ۴، معادله لاپلاس در مختصات قطبی

## جلسه هفتم ۳۰ تیرماه ۱۳۹۳

**مثال ۳۷.** *دمای مستقل از زمان یک صفحه‌ی دایره‌ای شکل به شعاع $a$ که دمای روی مرزآن $f(\theta)$ است را بیابید.*




شکل ۳: معادله‌ی لاپلاس روی یک دایره

**حل** باید مسأله‌ی

$$\begin{aligned} &u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, && r < a \\ &u(a,\theta) = f(\theta), && -\pi \le \theta \le \pi \end{aligned}$$

را حل کنیم. چون زوج‌های $(r,\theta)$ و $(r,\theta+2n\pi)$ یک نقطه در صفحه را مشخص می‌کنند، برای این که $u(r,\theta)$ تابع باشد، باید داشته باشیم

$$u(r,\theta) = u(r,\theta+2n\pi),$$

یعنی $u$ باید نسبت به $\theta$ تناوبی باشد. شرط تناوبی بودن $u$ نسبت به $\theta$ را می‌توان با فرمول‌های

$$\begin{aligned} &u(r,\pi) = u(r,-\pi), && 0 < r < a \\ &u_\theta(r,\pi) = u_\theta(r,-\pi), && 0 < r < a \end{aligned}$$

نیز بیان کرد. علاوه بر آن وقتی که $r \to 0^+$ باید تابع $u(r,\theta)$ یک تابع کران‌دار باشد. برای جدا کردن متغیرها قرار می‌دهیم $u(r,\theta) = R(r)\varphi(\theta)$. با جای‌گذاری در معادله داریم

$$R''\varphi + \frac{1}{r}R'\varphi + \frac{1}{r^2}R\varphi'' = 0.$$

بنابراین

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} = \frac{-\varphi''}{\varphi}.$$

چون طرف راست معادله‌ی اخیر تابعی بر حسب $\theta$ و طرف چپ آن تابعی بر حسب $r$ است، پس باید مقداری ثابت، مثلا برابر $\sigma$، باشد. در نتیجه

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} = \frac{-\varphi''}{\varphi} = \sigma$$

و داریم

$$\begin{cases} r^۲R'' + rR' - \sigma R = ۰ \\ \varphi'' + \sigma\varphi = ۰, \end{cases}$$

حالت اول: $\sigma = ۰$. در این حالت داریم $\varphi'' = ۰$ و در نتیجه $\varphi(\theta) = c_۱ + c_۲\theta$. چون $\varphi$ باید نسبت به $\theta$ تناوبی باشد، داریم $c_۲ = ۰$ و در نتیجه $\varphi(\theta) = c_۱$. اکنون به ازای $\sigma = ۰$، معادله بر حسب $R$ عبارت است از $r^۲R'' + rR' = ۰$. این معادله یک معادله‌ی اویلر است و با حل آن داریم $R(r) = a_۱ + a_۲ \ln r$. چون وقتی $r \to ۰^+$ باید $R(r)$ متناهی باشد، داریم $R(r) = a_۱$. بنابراین به ازای $\sigma = ۰$ داریم

$$\varphi_۰(\theta) = ۱, \quad R_۰(r) = ۱.$$

حالت دوم: $\sigma = -\lambda^۲$. در این حالت داریم $\varphi'' - \lambda^۲\varphi = ۰$. در نتیجه

$$\varphi(\theta) = c_۱ \cosh \lambda\theta + c_۲ \sinh \lambda\theta$$

و چون $\varphi$ نسبت به $\theta$ تناوبی است، داریم $c_۱ = c_۲ = ۰$. از این رو در این حالت فقط جواب بدیهی داریم.

حالت سوم: $\sigma = \lambda^۲$. در این حالت داریم $\varphi'' + \lambda^۲\varphi = ۰$. در نتیجه

$$\varphi(\theta) = c_۱ \cos \lambda\theta + c_۲ \sin \lambda\theta$$

و چون $\varphi$ نسبت به $\theta$ تناوبی است، داریم

$$\lambda = n\,, \qquad n = ۱, ۲, ۳, \dots.$$

بنابراین

$$\varphi_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta.$$

در واقع مسأله‌ی اشتورم-لیوویل

$$\begin{cases} \varphi'' + \sigma\varphi = ۰, \quad -\pi < \theta < \pi \\ \varphi(\pi) = \varphi(-\pi) \\ \varphi'(\pi) = \varphi'(-\pi) \end{cases}$$

را حل کردیم، که در مثال ۲۳ نیز بررسی شد. اکنون به ازای $\sigma = n^۲$، معادله بر حسب $R$ عبارت است از $r^۲R'' + rR' - n^۲R = ۰$. این معادله یک معادله‌ی اویلر است و با حل آن داریم

$$R(r) = c_۱ r^n + c_۲ r^{-n}.$$

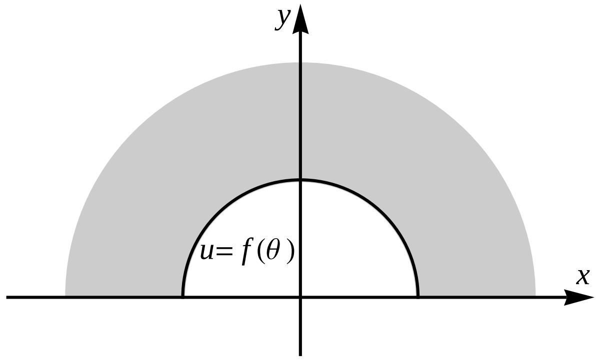
چون وقتی $r \to ۰^+$ باید $R(r)$ متناهی باشد، داریم $R(r) = c_۱ r^n$ و در نتیجه

$$R_n(r) = r^n.$$

بنابراین جواب‌های حاصل‌ضربی مسأله عبارتند از

$$u_۰(r,\theta) = R_۰(r)\varphi_۰(\theta) = ۱$$

$$u_n(r,\theta) = (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) d_n r^n, \quad n = ۱, ۲\ \dots.$$




شکل ۴: معادله‌ی لاپلاس خارج یک نیم‌دایره

از این‌رو جواب مسأله ترکیب خطی جواب‌های حاصل‌ضربی است:

$$u(r,\theta) = A_۰ + \sum_{n=۱}^{\infty}(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)r^n.$$

با استفاده از شرط اولیه‌ی $u(a,\theta) = f(\theta)$ داریم

$$\begin{aligned} f(\theta) &= u(a,\theta) \\ &= A_۰ + \sum_{n=۱}^{\infty}(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)a^n. \end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از سری فوریه‌ی $f(\theta)$ داریم

$$A_۰ = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,d\theta, \qquad A_n = \frac{۱}{a^n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta\,d\theta,$$
$$B_n = \frac{۱}{a^n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin n\theta\,d\theta. \quad \blacksquare$$

**مثال ۳۸.** *معادله‌ی لاپلاس با شرایط مرزی زیر را حل کنید. (شکل ۴ را ببینید.)*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^۲ u}{\partial r^۲} + \frac{۱}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{۱}{r^۲}\frac{\partial^۲ u}{\partial \theta^۲} = ۰, \quad r > a, \quad ۰ < \theta < \pi \\ &u(r,۰) = ۰ \\ &u(r,\pi) = ۰ \\ &u(a,\theta) = f(\theta). \end{aligned}$$

**حل** مشابه قبل باید فرض کنیم که $u(r,\theta)$ برای $r > a$ کران‌دار است. قرار می‌دهیم $u(r,\theta) = R(r)\varphi(\theta)$. با جای‌گذاری در معادله و محاسبات سرراست داریم

$$\varphi R'' + \frac{۱}{r}\varphi R' + \frac{۱}{r^۲}\varphi'' R = ۰$$

و در نتیجه

$$\frac{r^۲ R'' + rR'}{R} = \frac{-\varphi''}{\varphi} = \sigma.$$

از این‌رو

$$r^{2}R'' + rR' - \sigma R = 0$$

و

$$\begin{cases} \varphi'' + \sigma\varphi = 0 \\ \varphi(0) = 0, \\ \varphi(\pi) = 0 \end{cases}$$

مقادیر و توابع ویژه‌ی مسأله‌ی بالا عبارتند از

$$\sigma_n = \lambda_n^{2} = n^{2}, \qquad \varphi_n(\theta) = \sin n\theta, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots .$$

اکنون به ازای $\sigma_n = n^2$ معادله‌ی اویلر

$$r^{2}R'' + rR' - n^{2}R = 0$$

را داریم که پس از حل آن به دست می‌آید

$$R(r) = c_1 r^{n} + c_2 r^{-n}.$$

چون وقتی $r \to +\infty$ تابع $u(r,\theta)$ کران‌دار است، باید داشته باشیم $c_1 = 0$. در نتیجه

$$R_n(r) = r^{-n}$$

و بنابراین جواب‌های حاصل‌ضربی مسأله عبارتند از

$$u_n(r,\theta) = r^{-n}\sin n\theta, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

جواب مسأله ترکیب خطی جواب‌های حاصل‌ضربی است:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{-n} \sin n\theta.$$

با استفاده از شرط اولیه‌ی $u(a,\theta) = f(\theta)$ داریم

$$f(\theta) = u(a,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n a^{-n} \sin n\theta.$$

بنابراین $A_n a^{-n}$ ضریب سری فوریه‌ی سینوسی $f(\theta)$ است

$$A_n = \frac{2}{a^{-n}\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\sin n\theta\, d\theta. \quad \blacksquare$$

**مثال ۳۹.** *معادله‌ی لاپلاس با شرایط مرزی زیر را حل کنید.*

$$\begin{aligned} &u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^{2}}u_{\theta\theta} = 0, && 0 < r < a, \quad 0 < \theta < \tfrac{\pi}{2} \\ &u_\theta(r,0) = 0, && 0 \le r \le a \\ &u(r,\tfrac{\pi}{2}) = 0, && 0 \le r \le a \\ &u(a,\theta) = f(\theta), && 0 \le \theta \le \tfrac{\pi}{2} \end{aligned}$$

**حل** باید وقتی $r \to 0^+$ تابع $u(r,\theta)$ کران‌دار باشد. برای جدا کردن متغیرها قرار می‌دهیم $u(r,\theta) = R(r)\varphi(\theta)$. با جای‌گذاری در معادله و محاسبات سرراست داریم

$$R''\varphi + \frac{1}{r}R'\varphi + \frac{1}{r^2}R\varphi'' = 0, \quad \varphi'(0) = 0\,; \quad \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

در نتیجه

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\varphi''}{\varphi} = \sigma$$

و داریم

$$r^2R'' + rR' - \sigma R = 0$$

و هم‌چنین

$$\begin{cases} \varphi'' + \sigma\varphi = 0 \\ \varphi'(0) = 0, \quad \varphi(\frac{\pi}{2}) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

به سادگی دیده می‌شود که مقادیر و توابع ویژه‌ی مسأله‌ی (۵) عبارتند از

$$\sigma_n = \lambda_n^2 = (2n-1)^2; \quad \varphi_n(\theta) = \cos\lambda_n\theta \ , \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

اکنون به ازای $\sigma_n = (2n-1)^2$ داریم

$$r^2R'' + rR' - (2n-1)^2R = 0.$$

پس از حل معادله‌ی اویلر بالا داریم

$$R(r) = c_1r^{2n-1} + c_2r^{-(2n-1)}.$$

چون وقتی $r \to 0^+$ تابع $u(r,\theta)$ کران‌دار است، باید داشته باشیم $c_2 = 0$. در نتیجه

$$R_n(r) = r^{2n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

بنابراین جواب‌های حاصل‌ضربی مسأله عبارتند از

$$u_n(r,\theta) = r^{2n-1}\ \cos(2n-1)\theta, \quad = 1, 2, 3, \ldots$$

و جواب مسأله ترکیب خطی جواب‌های حاصل‌ضربی است:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{2n-1}\cos(2n-1)\theta.$$

با استفاده از شرط اولیه‌ی $u(a,\theta) = f(\theta)$ داریم

$$f(\theta) = u(a,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n a^{2n-1}\cos(2n-1)\theta.$$

بنابراین باید سری فوریه‌ی $f(\theta)$ را نسبت به مضارب فرد $\cos$ بیابیم. ضرایب این سری فوریه عبارتند از

$$A_n = \frac{2}{a^{2n-1}\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)\cos(2n-1)\theta\, d\theta.$$

**مثال ۴۰.** *معادله‌ی لاپلاس با شرایط مرزی زیر را حل کنید.*

$$\begin{aligned}
&u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0, && 1<r<e,\quad 0<\theta<\pi\\
&u(1,\theta)=u(e,\theta), && 0<\theta<\pi\\
&u(r,0)=0, && 1\le r\le e\\
&u(r,\pi)=1, && 1\le r\le e
\end{aligned}$$

با قرار دادن $u(r,\theta)=R(r)\varphi(\theta)$ ملاحظه می‌کنیم که شرایط مرزی همگن عبارتند از $R(1)=R(e)=0$، و $\varphi(0)=0$. با قرار دادن در معادله خواهیم داشت

$$R''\varphi+\frac{1}{r}R'\varphi+\frac{1}{r^2}R\varphi''=0.$$

بنابراین

$$-\frac{r^2R''+rR'}{R}=\frac{\varphi''}{\varphi}.$$

چون طرف راست معادله‌ی اخیر تابعی بر حسب $\theta$ و طرف چپ آن تابعی بر حسب $r$ است، پس باید مقداری ثابت، مثلا برابر $\sigma$، باشد. در نتیجه

$$\begin{cases} r^2R''+rR'+\sigma R=0\\ R(1)=R(e)=0\end{cases}\qquad \begin{cases}\varphi''-\sigma\varphi=0\\ \varphi(0)=0\end{cases}$$

در این‌جا مسأله‌ی اشتورم-لیوویل معادله‌ی اویلر بر حسب $R$ است. با ضرب معادله بر حسب $R$ در $\mu=\frac{1}{r^2}e^{\int\frac{1}{r}\,dr}=\frac{1}{r}$ صورت استاندارد آن به دست می‌اید:

$$rR''+R'+\frac{\sigma}{r}R=0,$$

یعنی $(rR')'+\frac{\sigma}{r}=0$ . بنابراین توابع ویژه‌ی مسأله نسبت به تابع وزن $\frac{1}{r}$ متعامد هستند. اکنون مقادیر و توابع ویژه را می‌یابیم. چون معادله‌ی شاخص معادله‌ی $r^2R''+rR'+\sigma R=0$ (که با فرض $R(r)=r^\alpha$ به دست می‌آید) عبارت است از $\alpha^2+\sigma=0$، پس باید سه حالت در نظر بگیریم:

<u>حالت اول: $\sigma=0$.</u> در این حالت داریم $r^2R''+rR'=0$. در نتیجه

$$R(r)=c_1+c_2\ln r.$$

چون $R(1)=0$، داریم $c_1=0$ و در نتیجه $R(r)=c_2\ln r$. چون $R(e)=0$، داریم $c_2=0$ و در نتیجه $R(r)=0$. از این‌رو در این حالت جواب بدیهی داریم.

<u>حالت دوم: $\sigma=-\lambda^2$.</u> در این حالت داریم $r^2R''+rR'-\lambda^2R=0$. در نتیجه

$$R(r)=c_1r^\lambda+c_2r^{-\lambda}.$$

چون $R(1)=0$، داریم $c_1+c_2=0$ و چون $R(e)=0$، داریم $c_1e^\lambda+c_2e^{-\lambda}=0$ و در نتیجه $c_1=c_2=0$. پس در این حالت نیز جواب بدیهی داریم.

حالت سوم: $\sigma = -\lambda^{2}$. در این حالت داریم $r^{2}R'' + rR' + \lambda^{2}R = 0$. در نتیجه

$$R(r) = c_{1}\cos(\lambda \ln r) + c_{2}\sin(\lambda \ln r).$$

چون $R(1) = 0$، داریم $c_{1} = 0$ و در نتیجه $R(r) = c_{2}\sin(\lambda \ln r)$. چون $R(e) = 0$، داریم $c_{2}\sin(\lambda) = 0$ و در نتیجه برای داشتن جواب نابدیهی باید داشته باشیم $\lambda = n\pi$، $n = 1, 2, \ldots$ . بنابراین مقادیر و توابع ویژه‌ی مسأله عبارتند از

$$\sigma_{n} = \lambda_{n}^{2} = (n\pi)^{2}, \qquad R_{n}(r) = \sin(n\pi \ln r).$$

در این حالت مسأله بر حسب $\theta$ عبارت است از

$$\begin{cases} \varphi'' - \lambda_{n}^{2}\varphi = 0 \\ \varphi(0) = 0, \end{cases}$$

که جواب آن عبارت است از

$$\varphi_{n}(\theta) = \sinh(\lambda_{n}\theta).$$

از این‌رو جواب‌های حاصل‌ضربی معادله که در شرایط مرزی همگن صدق می‌کنند، عبارتند از

$$u_{n}(r,\theta) = R_{n}(r)\varphi_{n}(\theta) = \sin(n\pi \ln r)\sinh(n\pi\theta).$$

بنابراین کلی‌ترین جواب مسأله ترکیب خطی جواب‌های حاصل‌ضربی است:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n}\sin(n\pi \ln r)\sinh(n\pi\theta).$$

با استفاده از شرط اولیه‌ی $u(r,\pi) = 1$ داریم

$$1 = u(r,\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n}\sin(n\pi \ln r)\sinh(n\pi^{2}).$$

پس با استفاده از سری فوریه‌ی $f(r) = 1$ بر حسب مجموعه‌ی متعامد $\{\sin(n\pi \ln r)\}_{n=1}^{\infty}$ نسبت به تابع وزن $\frac{1}{r}$ داریم

$$\begin{aligned} A_{n}\sinh(n\pi^{2}) &= \frac{(\sin(n\pi \ln r), 1)}{\|\sin(n\pi \ln r)\|^{2}} = \frac{\int_{1}^{e} \sin(n\pi \ln r)\frac{1}{r}\,dr}{\int_{1}^{e} \sin^{2}(n\pi \ln r)\frac{1}{r}\,dr} \\ &= \frac{\int_{0}^{\pi} \sin(nt)\,dt}{\int_{0}^{\pi} \sin^{2}(nt)\,dt}, \qquad t = \pi \ln r \\ &= \frac{\frac{1-(-1)^{n}}{n}}{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2\,(1-(-1)^{n})}{n\pi}. \end{aligned}$$

بنابراین

$$A_{n} = \frac{2\,(1-(-1)^{n})}{n\pi\sinh(n\pi^{2})}.$$

# ادامه‌ی فصل‌های ۴ و ۵، معادلات با مشتقات جزئی —- (غیرهمگن)

## جلسه هشتم ۳۱ تیرماه ۱۳۹۳

در یک مسأله‌ی مقدار مرزی هم و هم معادله ممکن است ناهمگن باشد و هم شرایط مرزی ممکن است ناهمگن باشند. ابتدا حالتی را بررسی می‌کنیم که جمله‌ی غیر همگن در معادله تابعی بر حسب $x$ و شرایط مرزی اعداد ثابت باشند. این حالت را در مثال بعد بررسی می‌کنیم

**مثال ۴۱.** *معادله‌ی زیر را به معادله‌ای همگن با شرایط مرزی همگن تبدیل کنید.*

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + h(x), & 0 < x < L \\ u(0,t) = A \\ u(L,t) = B \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

**حل** تغییر متغیر $u(x,t) = W(x,t) + \psi(x)$ در نظر می‌گیریم، که در آن تابع $\psi$ را طوری می‌یابیم که مسأله‌ی حاصل بر حسب $W$ همگن باشد. با قرار دادن در معادله خواهیم داشت

$$\begin{cases} W_t = a^2 (W_{xx} + \psi''(x)) + h(x) \\ W(0,t) + \psi(0) = A \\ W(L,t) + \psi(L) = B \\ W(x,0) + \psi(x) = f(x). \end{cases}$$

بنابراین اگر $\psi$ جواب مسأله‌ی

$$\begin{cases} a^2 \psi''(x) + h(x) = 0 \\ \psi(0) = A \\ \psi(L) = B \end{cases}$$

باشد، آن‌گاه معادله‌ای همگن بر حسب $W$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} W_t = a^2 W_{xx} \\ W(0,t) = 0 \\ W(L,t) = 0 \\ W(x,0) = f(x) - \psi(x). \quad \blacksquare \end{cases}$$

در این بخش معادله‌ی موج را بررسی می‌کنیم. ابتدا حالت بسیار ساده ای که جمله‌ی غیرهمگن فقط بر حسب $x$ و شرایط مرزی اعداد ثابت باشند را بررسی می‌کنیم.

**مثال ۴۲.** *مسأله‌ی ناهمگن زیر را به مسأله‌ای همگن با شرایط مرزی همگن تبدیل کنید*

$$\begin{aligned} &u_{tt} = a^2 u_{xx} + h(x), \qquad 0 < x < L \\ &u(0,t) = A \\ &u(L,t) = B \\ &u(x,0) = f(x) \\ &u_t(x,0) = g(x). \end{aligned}$$

**حل** با تغییر متغیر $u(x,t) = W(x,t) + \psi(x)$ و تعیین مناسب $\psi$ سعی می‌کنیم معادله‌ای همگن بر حسب $W$ بیابیم. با قرار دادن در معادله و شرایط مرزی و اولیه خواهیم داشت

$$\begin{aligned} &W_{tt} = a^2(W_{xx} + \psi''(x)) + h(x) \\ &W(0,t) + \psi(0) = A \\ &W(L,t) + \psi(L) = B \\ &W(x,0) + \psi(x) = f(x) \\ &W_t(x,0) = g(x). \end{aligned}$$

بنابراین اگر $\psi$ جواب مسأله‌ی

$$\begin{aligned} &a^2\psi''(x) + h(x) = 0 \\ &\psi(0) = A \\ &\psi(L) = B \end{aligned}$$

باشد، آن‌گاه مسأله‌ی حاصل بر حسب $W$، همگن خواهد بود:

$$\begin{aligned} &W_{tt} = a^2 W_{xx} \\ &W(0,t) = W(L,t) = 0 \\ &W(x,0) = f(x) - \psi(x) \\ &W_t(x,0) = g(x). \end{aligned}$$

مثلا اگر مسأله‌ی

$$\begin{aligned} &u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin x, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0 \\ &u(0,t) = u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0 \\ &u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \end{aligned}$$

را در اختیار داشته باشیم، با توجه به مثال قبل تابع $\psi$ را طوری تعیین می‌کنیم که

$$\begin{aligned} a^{2}\psi''(x)+\sin x &= 0\\ \psi(0)=\psi\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0. \end{aligned}$$

با حل معادله‌ی بالا خواهیم داشت

$$\psi(x)=\frac{1}{a^{2}}\sin x-\frac{2}{\pi a^{2}}x.$$

بنابراین اگر قرار دهیم $u(x,t)=W(x,t)+\psi(x)$، آن‌گاه مسأله بر حسب $W$ عبارت است از

$$\begin{aligned} &W_{tt}=a^{2}W_{xx}\\ &W(0,t)=W\left(\frac{\pi}{2},t\right)=0\\ &W(x,0)=f(x)-\frac{1}{a^{2}}\sin x+\frac{2}{\pi a^{2}}x\\ &W_t(x,0)=g(x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**مثال ۴۳.** *مسأله‌ی زیر را به یک مسأله‌ی همگن را تبدیل کنید، $h$ عددی ثابت است.*

$$\begin{aligned} &u_{tt}=c^{2}u_{xx}+h\\ &u(0,t)=u(L,t)=0\\ &u(x,0)=u_t(x,0)=0. \end{aligned}$$

**حل** با قرار دادن $u(x,t)=v(x,t)+S(x)$ دیدیم برای همگن شدن معادله‌ی حاصل بر حسب $v$ باید داشته باشیم

$$\begin{aligned} &c^{2}S''(x)+h=0\\ &S(0)=0\\ &S(L)=0. \end{aligned}$$

با حل مسأله‌ی اخیر خواهیم داشت

$$S(x)=\frac{-h}{2c^{2}}x^{2}+\frac{hL}{2c^{2}}x.$$

از این‌رو مسأله‌ی همگن با شرایط مرزی همگن بر حسب $v$ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} &v_{tt}=c^{2}v_{xx}\\ &v(x,0)=0-\left(\frac{-h}{2c^{2}}x^{2}+\frac{hL}{2c^{2}}\right)\\ &v_t(x,0)=0\\ &v(0,t)=v(L,t)=0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

اکنون حالت کلی‌تر (و مشکل‌تر) را در نظر می‌گیریم. در این حالت جمله‌ی غیرهمگن در معادله می‌تواند بر حسب $x$ و $t$ باشد و علاوه بر آن شرایط مرزی ممکن است بر حسب $t$ باشند. در این حالت ابتدا نشان می‌دهیم که با یک تغییر متغیر می‌توان شرایط مرزی را همگن کرد. به عنوان مثال فرض کنید مسأله‌ی ناهمگن

$$u_t = a^۲ u_{xx} + g(x,t), \qquad ۰ < x < L \tag{۶}$$

$$u(۰,t) = \varphi(t), \quad t > ۰ \tag{۷}$$

$$u(L,t) = \psi(t), \quad t > ۰ \tag{۸}$$

$$u(x,۰) = f(x) \tag{۹}$$

در اختیار باشد. در این‌جا شرایط مرزی ناهمگن و توابعی بر حسب $t$ هستند. با استفاده از تغییر متغیر

$$u(x,t) = W(x,t) + v(x,t) \tag{۱۰}$$

که در آن

$$v(x,t) = C_۱ x + C_۲ \tag{۱۱}$$

را طوری تعیین می‌کنیم که معادله‌ی حاصل بر حسب $W$ با شرایط مرزی همگن باشد. با استفاده از شرایط مرزی (۷) و (۸) داریم

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= u(۰,t) = W(۰,t) + v(۰,t) = W(۰,t) + C_۲ \\ \psi(t) &= u(L,t) = W(L,t) + v(L,t) = W(L,t) + C_۱ L + C_۲. \end{aligned}$$

چون می‌خواهیم $W(۰,t) = W(L,t) = ۰$، باید داشته باشیم

$$C_۲ = \varphi(t), \qquad C_۱ = \frac{۱}{L}[\psi(t) - \varphi(t)].$$

بنابراین با انتخاب

$$v(x,t) = \varphi(t) + \frac{x}{L}[\psi(t) - \varphi(t)]$$

معادله‌ی حاصل بر حسب $W$ با شرایط همگن است. اکنون مسأله را بر حسب $W$ می‌یابیم. با مشتق‌گیری از (۱۰) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} u_t &= W_t + \varphi'(t) + \frac{x}{L}[\psi'(t) - \varphi'(t)] \\ u_{xx} &= W_{xx} \end{aligned}$$

و در نتیجه مسأله برای $W$ به صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned} &W_t = a^۲ W_{xx} + g(x,t) - \varphi'(t) - \frac{x}{L}[\psi'(t) - \varphi'(t)] \\ &W(۰,t) = W(L,t) = ۰ \\ &W(x,۰) = f(x) - \varphi(۰) - \frac{x}{L}[\psi(۰) - \varphi(۰)]. \end{aligned}$$

در نتیجه با تغییر متغیر مناسب همواره می‌توان شرایط مرزی را همگن کرد. پس در مثال‌های بعد شرایط مرزی را همگن در نظر می‌گیریم. فرض کنید مسأله‌ی گرمای

$$u_t = a^۲ u_{xx} + g(x,t), \qquad ۰ < x < L \tag{۱۲}$$

$$u(۰,t) = u(L,t) = ۰ \tag{۱۳}$$

$$u(x,۰) = f(x) \tag{۱۴}$$

در اختیار باشد. در این مسأله شرایط مرزی همگن هستند ولی معادله دیفرانسیل ناهمگن است. برای حل مسأله‌ی (۱۳)-(۱۲) ابتدا مسأله‌ی همگن متناظر آن، یعنی

$$u_t = a^۲ u_{xx}, \qquad ۰ < x < L$$
$$u(۰,t) = u(L,t) = ۰$$
$$u(x,۰) = f(x).$$

را در نظر می‌گیریم. توابع ویژه‌ی مسأله‌ی بالا عبارتند از

$$\sin\frac{n\pi x}{L}, \qquad n = ۱,۲,۳,\ldots \tag{۱۵}$$

سعی می‌کنیم جواب مسأله‌ی ناهمگن را بر حسب توابع ویژه‌ی مسأله همگن بیابیم. در واقع سری فوریه تابع جواب $u(x,t)$ را بر حسب توابع ویژه‌ی مسأله همگن به دست می‌آوریم. برای این کار فرض می‌کنیم سری فوریه‌ی $u(x,t)$ به صورت زیر باشد

$$u(x,t) = \sum_{n=۱}^{\infty} u_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L},$$

که در آن $u_n(t)$ ضریب سری فوریه تابع $u(x,t)$ است و باید با استفاده از شرایط مسأله آن‌ها را بیابیم. با استفاده از شرط اولیه‌ی (۱۴) داریم

$$f(x) = u(x,۰) = \sum_{n=۱}^{\infty} u_n(۰)\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

در نتیجه $u_n(۰)$ ضریب سری فوریه‌ی سینوسی $f(x)$ است، یعنی

$$u_n(۰) = \frac{۲}{L}\int_۰^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx. \tag{۱۶}$$

اکنون برای یافتن $u_n(t)$ سری فوریه‌ی تابع $g(x,t)$ را بر حسب توابع ویژه‌ی مسأله، یعنی توابع (۱۵) می‌یابیم

$$g(x,t) = \sum_{n=۱}^{\infty} g_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L} \qquad \text{و} \qquad g_n(t) = \frac{۲}{L}\int_۰^L g(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

با جای‌گذاری در معادله‌ی (۱۲) به دست می‌آوریم

$$\sum_{n=۱}^{\infty} u_n'(t)\sin\frac{n\pi x}{L} = a^۲\sum_{n=۱}^{\infty} u_n(t)\left[-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^۲\sin\frac{n\pi x}{L}\right] + \sum_{n=۱}^{\infty} g_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

با دسته بندی جملات خواهیم داشت

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\left[u_n'(t) + \left(\frac{an\pi}{L}\right)^۲ u_n(t)\right]\sin\frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=۱}^{\infty} g_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

با متحد قرار دادن دو طرف تساوی بالا خواهیم داشت

$$u_n'(t) + \left(\frac{an\pi}{L}\right)^{۲} u_n(t) = g_n(t).$$

با حل معادله‌ی خطی مرتبه‌ی اول بالا ضرایب مجهول $u_n(t)$ به صورت زیر به دست می‌آیند

$$u_n(t) = e^{-(\frac{an\pi}{L})^{۲}t}u_n(۰) + \int_{۰}^{t} e^{-(an\pi/L)^{۲}(t-z)}g_n(z)\,dz.$$

**مثال ۴۴.** *مسأله‌ی غیرهمگن زیر را حل کنید*

$$\begin{cases} u_t = a^{۲}u_{xx} + t(x^{۲} - \pi x), & ۰ < x < \pi, \quad t > ۰ \\ u(۰,t) = ۰, \\ u(\pi,t) = ۰, \\ u(x,۰) = x \end{cases}$$

**حل** توابع ویژه‌ی مسأله‌ی همگن متناظر، یعنی

$$\begin{cases} u_t = a^{۲}u_{xx}, & ۰ < x < \pi \\ u(۰,t) = u(\pi,t) = ۰ \\ u(x,۰) = x \end{cases}$$

عبارتند از

$$\sin nx, \qquad n = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

سری فوریه تابع جواب $u(x,t)$ را بر حسب توابع ویژه‌ی مسأله همگن به دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم سری فوریه‌ی $u(x,t)$ به صورت زیر باشد

$$u(x,t) = \sum_{n=۱}^{\infty} u_n(t)\sin nx,$$

که در آن $u_n(t)$ ضریب سری فوریه تابع $u(x,t)$ است. با استفاده از شرط اولیه‌ی $u(x,۰) = x$ داریم

$$x = u(x,۰) = \sum_{n=۱}^{\infty} u_n(۰)\sin nx.$$

در نتیجه $u_n(۰)$ ضریب سری فوریه‌ی سینوسی $x$ است، یعنی

$$u_n(۰) = \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{۲}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^{۲}}\right]_{۰}^{\pi} = \frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n}.$$

اکنون برای یافتن $u_n(t)$ سری فوریه‌ی تابع $g(x,t) = t(x^{۲} - \pi x)$ را بر حسب توابع ویژه‌ی مسأله می‌یابیم. بنابراین

$$t(x^{۲} - \pi x) = \sum_{n=۱}^{\infty} b_n(t)\sin nx,$$

که در آن

$$\begin{aligned} b_n(t) &= \frac{۲}{\pi}t\int_{۰}^{\pi}(x^{۲} - \pi x)\sin nx\,dx \\ &= \frac{۲}{\pi}t\left[-(x^{۲} - \pi x)\frac{\cos nx}{n} + (۲x - \pi)\frac{\sin nx}{n^{۲}} + ۲\frac{\cos nx}{n^{۳}}\right]_{۰}^{\pi} \\ &= \frac{۴t((-۱)^n - ۱)}{\pi n^{۳}}. \end{aligned}$$

با جای‌گذاری نتایج بالا در معادله‌ی $u_t = a^۲ u_{xx} + t(x^۲ - \pi x)$ به دست می‌آوریم

$$\sum_{n=۱}^{\infty} u_n'(t) \sin nx = a^۲ \sum_{n=۱}^{\infty} u_n(t)(-n^۲) \sin nx + \sum_{n=۱}^{\infty} b_n(t) \sin nx.$$

با دسته بندی جملات خواهیم داشت

$$\sum_{n=۱}^{\infty} (u_n'(t) + a^۲ n^۲ u_n(t)) \sin nx = \sum_{n=۱}^{\infty} b_n(t) \sin nx.$$

با متحد قرار دادن دو طرف تساوی بالا به دست می‌آوریم

$$u_n'(t) + a^۲ n^۲ u_n(t) = b_n(t).$$

با حل معادله‌ی خطی مرتبه‌ی اول بالا ضرایب مجهول $u_n(t)$ به صورت زیر به دست می‌آیند

$$u_n(t) = e^{-a^۲ n^۲ t} u_n(\circ) + \int_\circ^t e^{-(a^۲ n^۲)(t-z)} b_n(z)\, dz.$$

چون $b_n(t) = \dfrac{۴t((-۱)^n - ۱)}{\pi n^۳}$ و $u_n(\circ) = \dfrac{۲(-۱)^{n+۱}}{n}$ به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} u_n(t) &= e^{-a^۲ n^۲ t} \frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n} + \frac{۴((-۱)^n - ۱)}{\pi n^۳} \int_\circ^t z e^{-(a^۲ n^۲)(t-z)}\, dz \\ &= e^{-a^۲ n^۲ t} \frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n} + \frac{۴((-۱)^n - ۱)}{\pi n^۳} \left[ -z \frac{e^{-(a^۲ n^۲)(t-z)}}{a^۲ n^۲} + \frac{e^{-(a^۲ n^۲)(t-z)}}{a^۴ n^۴} \right]_\circ^t \\ &= e^{-a^۲ n^۲ t} \frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n} + \frac{۴((-۱)^n - ۱)}{\pi n^۳} \left[ \frac{۱ - a^۲ n^۲ t}{a^۴ n^۴} - \frac{e^{-a^۲ n^۲ t}}{a^۴ n^۴} \right] \end{aligned}$$

**مثال ۴۵.** *مسأله‌ی غیرهمگن زیر را حل کنید*

$$\begin{aligned} & u_{tt} = c^۲ u_{xx} + h(x,t), \qquad \circ < x < L, \quad t > \circ \\ & u(\circ, t) = u(L, t) = \circ \\ & u(x, \circ) = f(x) \\ & u_t(x, \circ) = g(x). \end{aligned}$$

**حل** ابتدا مسأله‌ی همگن نظیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} & u_{tt} = c^۲ u_{xx} \\ & u(\circ, t) = u(L, t) = \circ \end{aligned}$$

به سادگی می‌توان دید که توابع ویژه‌ی مسأله عبارتند از

$$\left\{ \sin \frac{n\pi x}{L} \right\}_{n=۱}^{\infty}.$$

برای یافتن جواب مسأله‌ی غیرهمگن بسط فوریه‌ی آنرا برحسب توابع ویژه می‌نویسیم:

$$u(x,t) = \sum_{n=۱}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

هدف ما پیدا کردن $u_n(t)$ است. اکنون بسط فوریه‌ی سینوسی $h(x,t)$ را می‌نویسیم

$$h(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} h_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L},\qquad h_n(t)=\frac{2}{L}\int_0^L h(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

با مشتق‌گیری از سری فوریه‌ی $u(x,t)$ خواهیم داشت

$$u_{tt}=\sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t)\sin\frac{n\pi x}{L}u_{xx}=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\sin\frac{n\pi x}{L}\right).$$

اکنون با جای‌گذاری داده‌های بالا در معادله خواهیم داشت

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t)\sin\frac{n\pi x}{L}=c^2\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\left(\frac{-n^2\pi^2}{L^2}\sin\frac{n\pi x}{L}\right)+\sum_{n=1}^{\infty} h_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

در نتیجه

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[u_n''(t)+\frac{c^2n^2\pi^2}{L^2}u_n(t)-h_n(t)\right]\sin\frac{n\pi x}{L}=0$$

و با متحد قرار دادن دو طرف تساوی داریم

$$u_n''(t)+\frac{c^2n^2\pi^2}{L^2}u_n(t)=h_n(t).$$

با حل معادله‌ی خطی مرتبه‌ی دوم بالا به دست می‌آوریم

$$u_n(t)=a_n\cos\lambda_n t+b_n\sin\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t h_n(\eta)\sin\lambda_n(t-\eta)\,d\eta,$$

که در آن $\lambda_n=\frac{cn\pi}{L}$. بنابراین

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\mu_n t+b_n\sin\lambda_n t+\frac{1}{\mu_n}\int_0^t h_n(\eta)\sin\mu_n(t-\eta)\,d\eta\right]\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

با استفاده از شرط اولیه داریم

$$f(x)=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin\frac{n\pi x}{L}$$

و در نتیجه $a_n$ ضریب فوریه‌ی سینوسی $f(x)$ است:

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

از طرف دیگر

$$g(x)=u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\lambda_n\sin\frac{n\pi x}{L}$$

و بنابراین با استفاده از بسط فوریه‌ی سینوسی $g(x)$، $b_n$ به دست می‌آید

$$b_n=\frac{2}{\lambda_n L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.\quad\blacksquare$$

**مثال ۴۶.** *مسأله‌ی موج ناهمگن زیر را به مسأله‌ای با شرایط مرزی همگن تبدیل کنید*

$$\begin{aligned} &u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x,t), \quad 0 < x < L \\ &u(0,t) = \varphi(t) \\ &u(L,t) = \psi(t) \\ &u(x,0) = f(x) \\ &u_t(x,0) = g(x). \end{aligned}$$

**حل** تغییر متغیر $u(x,t) = v(x,t) + W(x,t)$ را اعمال می‌کنیم و با تعیین مناسب $W$، مسأله‌ای با شرایط مرزی همگن بر حسب $v$ به دست می‌آوریم. با جای‌گذاری در معادله و شرایط مرزی و اولیه خواهیم داشت

$$\begin{aligned} v_{tt} + W_{tt} &= c^2(v_{xx} + W_{xx}) + h(x,t) \\ v(x,0) &= f(x) - W(x,0) \\ v(x,0) &= g(x) - W_t(x,0) \\ v(0,t) &= \varphi(t) - W(0,t) \\ v(L,t) &= \psi(t) - W(L,t). \end{aligned}$$

برای این‌که شرایط مرزی همگن شوند باید قرار دهیم

$$\begin{aligned} &W(0,t) = \varphi(t) \\ &W(L,t) = \psi(t). \end{aligned}$$

بنابراین اگر

$$W(x,t) = \varphi(t) + \frac{x}{L}[\psi(t) - \varphi(t)],$$

آن‌گاه مسأله با شرایط مرزی همگن زیر را داریم

$$\begin{aligned} v_{tt} &= c^2 v_{xx} + h(x,t) - W_{tt} \\ v(x,0) &= f(x) - W(x,0) \\ v_t(x,0) &= g(x) - W_t(x,0) \\ v(0,t) &= 0 \\ v(L,t) &= 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

فرض کنید که مسأله به صورت زیر باشد

$$\begin{aligned} &\nabla^2 u = 0, && 0 < x < a, \quad 0 < y < b \\ &u(x,a) = f_1(x), && 0 \le x \le a \\ &u(x,b) = f_2(x), && 0 \le x \le a \\ &u(0,y) = g_1(y), && 0 \le y \le b \\ &u(a,y) = g_1(y), && 0 \le y \le b. \end{aligned}$$

در این صورت برای جدا کردن متغیرها، مسأله را به دو مسأله تفکیک می‌کنیم. برای این کار $u(x,y)=v(x,y)+w(x,y)$ که در آن

$$\begin{array}{ll} \nabla^2 v = 0 & \nabla^2 w = 0 \\ v(x,0) = f_1(x) & w(x,0) = 0 \\ v(x,b) = f_2(x) & w(x,b) = 0 \\ v(0,y) = 0 & w(0,y) = g_1(y) \\ v(a,y) = 0 & w(a,y) = g_2(y). \end{array}$$

با حل دو مسأله‌ی بالا جواب مسأله‌ی اصلی به دست می‌آید.

**مثال ۴۷.** *معادله لاپلاس با شرایط مرزی زیر را حل کنید.*

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=\sin x+\cos y \\ u(0,y)=-1 \\ u(\pi,y)=1 \\ u(x,0)=\cos x \\ u_y(x,\pi)=\sin x \end{cases}$$

**حل** مسأله را به دو مسأله تفکیک می‌کنیم

$$(1)\quad \begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=\sin x \\ u(0,y)=u(\pi,y)=0 \\ u(x,0)=\cos x \\ u_y(x,\pi)=0 \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=\cos y \\ u(0,y)=-1 \\ u(\pi,y)=1 \\ u(x,0)=u_y(x,\pi)=0 \end{cases}$$

برای حل مسأله‌ی (۱) ابتدا با تغییر متغیر $u(x,y)=W(x,y)+\varphi(x)$ و تعیین مناسب $\varphi(x)$ آن را به معادله‌ای همگن بر حسب $W$ تبدیل می‌کنیم. با قرار دادن در معادله و شرایط مرزی داریم

$$\begin{cases} W_{xx}+\varphi''(x)+W_{yy}=\sin x \\ W(0,y)+\varphi(0)=0 \\ W(a,y)+\varphi(a)=0. \end{cases}$$

در نتیجه تابع $\varphi$ باید در مسأله‌ی

$$\begin{cases} \varphi''(x)=\sin x \\ \varphi(0)=0 \\ \varphi(\pi)=0 \end{cases}$$

صدق کند. بنابراین $\varphi(x) = \sin x$. مسأله‌ی حاصل بر حسب $W$ به صورت همگن زیر است

$$(۳)\quad \begin{cases} W_{xx} + W_{yy} = ۰ \\ W(۰, y) = W(\pi, y) = ۰ \\ W(x, ۰) = \cos x - \sin x \\ W_y(x, \pi) = \sin x. \end{cases}$$

برای حل مسأله‌ی (۲) ابتدا با تغییر متغیر $u(x, y) = W(x, y) + \varphi(y)$ و تعیین مناسب $\varphi(y)$ آن را به معادله‌ای همگن بر حسب $W$ تبدیل می‌کنیم. با قرار دادن در معادله و شرایط مرزی داریم

$$\begin{cases} W_{xx} + W_{yy} + \varphi''(y) = \cos y \; W(x, ۰) + \varphi(۰) = ۰ \\ W_y(x, \pi) + \varphi'(\pi) = ۰. \end{cases}$$

در نتیجه تابع $\varphi$ باید در مسأله‌ی

$$\begin{cases} \varphi''(y) = \cos y \\ \varphi(۰) = ۰ \\ \varphi'(\pi) = ۰ \end{cases}$$

صدق کند. بنابراین $\varphi(y) = ۱ - \cos y$. مسأله‌ی حاصل بر حسب $W$ به صورت همگن زیر است

$$(۴)\quad \begin{cases} W_{xx} + W_{yy} = ۰ \\ W(۰, y) = -۲ + \cos y \\ W(\pi, y) = \cos y \\ W(x, ۰) = ۰ \\ W_y(x, \pi) = ۰. \end{cases}$$

مسأله‌های (۳) و (۴) را به راحتی می‌توان حل کرد.

در ادامه این بخش روش دالامبر برای حل معادله‌ی موج را بررسی می‌کنیم. این روش مبتنی بر تغییر یک متغیر مناسب است. ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که سیم مرتعش نامتناهی باشد:

$$u_{tt} = a^۲ u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > ۰$$
$$u(x, ۰) = f(x)$$
$$u_t(x, ۰) = g(x).$$

تغییر متغیر

$$s = x + at, \qquad r = x - at$$

را اعمال می‌کنیم. با تغییر متغیرهای بالا $u$ تابعی $r$ و $s$ خواهد بود. می‌خواهیم به جای مشتقات $u$ نسبت به $t$ و $x$ از مشتقات $u$ نسبت به $r$ و $s$ در معادله دیفرانسیل استفاده کنیم. با استفاده از قاعده‌ی زنجیری مشتقات $u$ را نسبت به $x$ می‌یابیم. با توجه

به این‌که $r_x = ۱$ و $s_x = ۱$ داریم

$$\begin{aligned} u_x &= u_r \cdot r_x + u_s \cdot s_x = u_r + u_s \\ u_{xx} &= (u_r)_x + (u_s)_x = u_{rr} \cdot r_x + u_{rs} s_x + u_{sr} r_x + u_{ss} s_x \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{rr} + u_{rs} + u_{sr} + u_{ss} \\ &= u_{rr} + ۲u_{rs} + u_{ss}. \end{aligned}$$

به طریق مشابه، با توجه به این‌که $r_t = -a$ و $s_t = a$، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} u_t &= u_r r_t + u_s s_t = -a u_r + a u_s \\ u_{tt} &= -a(u_r)_t + a(u_s)_t = -a[u_{rr}.r_t + u_{rs} s_t] + a[u_{sr} r_t + u_{ss} s_t] \\ &= -a[-a u_{rr} + a u_{rs}] + a[-a u_{sr} + a u_{ss}] \\ &= a^۲ u_{rr} - a^۲ u_{rs} - a^۲ u_{sr} + a^۲ u_{ss} \\ &= a^۲ u_{rr} - ۲a^۲ u_{rs} + a^۲ u_{ss}. \end{aligned}$$

اکنون چون $u_{tt} = a^۲ u_{xx}$ داریم

$$u_{rs} = ۰$$

و در نتیجه

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial r \sigma s} = ۰.$$

با انتگرال‌گیری نسبت به $r$ به دست می‌آوریم

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \alpha(s)$$

که در آن $\alpha(s)$ تابعی دلخواه است. اکنون با انتگرال‌گیری نسبت به $s$ خواهیم داشت

$$u = \int \alpha(s)\, ds + \psi(r).$$

بنابراین

$$u = \phi(s) + \psi(r)$$

و در نتیجه

$$u(x,t) = \varphi(x+at) + \psi(x-at).$$

چون $u(x,۰) = f(x)$ داریم

$$u(x,۰) = \varphi(x) + \psi(x) = f(x) \qquad (۱۷)$$

علاوه بر آن چون $u_t(x,0)=g(x)$ و

$$u_t(x,y)=a\varphi'(x+at)-a\psi'(x-at)$$

خواهیم داشت $u_t(x,0)=a\varphi'(x)-a\psi'(x)=g(x)$، یعنی

$$\varphi'(x)-\psi'(x)=\frac{1}{a}g(x)$$

و در نتیجه با استفاده از انتگرال‌گیری داریم

$$\varphi(x)-\psi(x)=\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}g(s)\,ds+k, \tag{18}$$

که در آن $k$ یک عدد ثابت و $x_0\in(-\infty,+\infty)$ عدد دلخواهی است. با استفاده از معادله‌های (۱۷) و (۱۸) دستگاه

$$\begin{cases}\varphi(x)+\psi(x)=f(x)\\ \varphi(x)-\psi(x)=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{x_0}^{x}g(s)\,ds+k\end{cases}$$

را داریم. با حل دستگاه اخیر به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}g(s)\,ds+\frac{k}{2}\\ \psi(x)&=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}g(s)\,ds-\frac{k}{2}.\end{aligned}$$

از این‌رو جواب مسأله‌ی تار مرتعش نامتناهی عبارت است از

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\varphi(s)+\psi(r)\\ &=\varphi(x+at)+\psi(x-at)\\ &=\frac{1}{2}f(x+at)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x+at}g(s)\,ds+\frac{1}{2}f(x-at)-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x-at}g(s)\,ds\\ &=\frac{1}{2}[f(x+at)+f(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g(s)\,ds.\end{aligned}$$

**مثال ۴۸.** *با استفاده از روش دالامبر مسأله‌ی تار مرتعش نامتناهی زیر را حل کنید*

$$\begin{aligned}&u_{tt}=a^2u_{xx}, && -\infty<x<+\infty\\ &u(x,0)=\sin x\\ &u_t(x,0)=\cos x\end{aligned}$$

**حل** با توجه به فرمول به دست آمده در روش دالامبر داریم

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{2}[\sin(x+at)+\sin(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\cos z\,dz\\ &=\sin x\cos at+\frac{1}{2a}[\sin(x+at)-\sin(x-at)]\\ &=\sin x\cos at+\frac{1}{a}\cos x\sin at.\quad\blacksquare\end{aligned}$$